

6.6 Λυμένα Προβλήματα

Άσκηση 1.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

α) Έστω $M, k \in \mathbb{R}$ θετικοί ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^k$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι f συνεχής στο x_0 .

β) Έστω $M, k, \rho \in \mathbb{R}$ θετικοί ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^k$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \rho$. Δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Λύση.

α) Έστω $\varepsilon > 0$, τυχόν θετικός αριθμός. Θέτουμε

$$\delta = \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{M}}$$

και παρατηρούμε ότι

“εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^k < M\delta^k = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Οπότε η f συνεχής στο x_0 .

β) Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Θέτουμε

$$\delta = \min \left\{ \rho, \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{M}} \right\}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$.

Επειδή $\delta \leq \rho$, έχουμε ότι $|x - x_0| < \rho$ κι άρα από υπόθεση

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^k < M\delta^k \underset{\text{αφού } \delta \leq \sqrt[k]{\varepsilon/M}}{\leq} M \left(\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{M}} \right)^k = \varepsilon$$

Οπότε για το τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta$$

Συνεπώς η f συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 2.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $k \in (0, +\infty)$.

α) Εάν $|f(x) - f(x_0)| \leq |g(x)| \cdot |x - x_0|^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και η g είναι φραγμένη, δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

β) Εάν $|f(x) - f(x_0)| \leq |g(x)| \cdot |x - x_0|^k$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\rho > 0$ ώστε η g φραγμένη στο $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Λύση.

α) Εφόσον η g φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|g(x)| \leq M, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς από υπόθεση έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^k, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μετά όπως στο (α) του προηγούμενου λυμένου, δείχνουμε ότι η f συνεχής στο x_0 .

β) Εφόσον η g φραγμένη στο $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|g(x)| \leq M, \text{ για κάθε } x \text{ με } |x - x_0| < \rho$$

Συνεπώς από υπόθεση έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^k$$

για κάθε x με $|x - x_0| < \rho$.

Μετά συνεχίζουμε όπως το (β) του προηγούμενου προβλήματος.

Άσκηση 3.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

α) Εάν $f(x) = (x - a)^k g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η g είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η f συνεχής στο a .

β) Εάν $|f(x)| \leq 3|g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η g συνεχής στο a και $g(a) = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο a .

Λύση.

α) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $f(a) = 0$ διότι από υπόθεση για $x = a$ έχουμε ότι

$$f(a) = (a - a)^k g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$$

Επίσης εφόσον η g είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε από υπόθεση έχουμε

$$|f(x)| = |x - a|^k |g(x)| \leq M|x - a|^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και εφόσον $f(a) = 0$, έχουμε ότι

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|^k, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ας δ.ο. η f συνεχής στο a .

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Για $\delta = \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{M}}$ έχουμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - a| < \delta$, τότε από (1) παίρνουμε

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|^k < M\delta^k = \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο a .

β) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $f(a) = 0$ διότι από υπόθεση για $x = a$ έχουμε

$$|f(a)| \leq 3|g(a)| \stackrel{g(a)=0}{=} 0 \Rightarrow f(a) = 0$$

Οπότε από υπόθεση έχουμε

$$|f(x) - f(a)| \stackrel{f(a)=0}{=} |f(x)| \leq 3|g(x)| \stackrel{g(a)=0}{=} 3|g(x) - g(a)| \quad (2)$$

Ας δείξουμε ότι η f συνεχής στο a .

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός.

Επειδή η g συνεχής στο a , για $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon' \quad (3)$$

Εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - a| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(a)| \stackrel{(2)}{\leq} 3|g(x) - g(a)| \stackrel{(3)}{<} 3\varepsilon' = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο a .

Άσκηση 4.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\rho > 0$ ώστε η f συνεχής στο $(x - \rho, x + \rho)$ (δηλ. ο περιορισμός $f|_{(x-\rho, x+\rho)}$ είναι συνεχής). Αποδείξτε ότι η f συνεχής.

Λύση.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Από υπόθεση, υπάρχει $\rho > 0$ ώστε η $f|_{(x_0-\rho, x_0+\rho)}$ συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Εφόσον η $f|_{(x_0-\rho, x_0+\rho)}$ συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{“}\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \underbrace{(x_0 - \rho, x_0 + \rho)}_{\substack{\text{πεδίο ορισμού της} \\ f|_{(x_0-\rho, x_0+\rho)}}}, \text{ ισχύει } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\text{”} \quad (1)$$

Εάν $\lambda = \min\{\rho, \delta\}$ έχουμε ότι $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ και συνεπώς έχουμε από (1) ότι

$$\forall x \in (x_0 - \lambda, x_0 + \lambda) \text{ ισχύει } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Συνεπώς η f συνεχής στο x_0 .

(Το ίδιο προκύπτει άμεσα και από την Πρόταση 6.4.6 (β), εφόσον το $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ είναι ανοικτό διάστημα.)

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε ανοικτό διάστημα. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Άσκηση 5.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε με την βοήθεια του ορισμού ότι η f συνεχής.

Λύση.

Πρέπει να δ.ο. η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |(x + x_0)(x - x_0)| = \\ &= |x + x_0| |x - x_0| \leq (|x| + |x_0|) |x - x_0| \end{aligned}$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (|x| + |x_0|) |x - x_0|$$

Επίσης εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < 1$ τότε

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |x_0|$$

κι άρα

$$|x| + |x_0| < 1 + |x_0| + |x_0| = 1 + 2|x_0|$$

Οπότε για $M = 1 + 2|x_0|$ έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| \quad (1)$$

για κάθε x με $|x - x_0| < 1$.

Τώρα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 όπως στο (β) του ??ου λυμένου. Συγκεκριμένα έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Θέτουμε $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{M}\}$.

Παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε κατ' αρχήν επειδή $\delta \leq 1$, έχουμε ότι $|x - x_0| < 1$, κι άρα από (1) έπεται ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < M \cdot \delta \underset{\text{αφού } \delta \leq \varepsilon/M}{\leq} M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 6.

Αποδείξτε με την βοήθεια του ορισμού ότι η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 4x^3$ είναι συνεχής.

Λύση.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| = |4x^3 - 4x_0^3| = 4|x^2 + xx_0 + x_0^2| \cdot |x - x_0| \quad (1)$$

Τώρα παρατηρούμε ότι εάν x με $|x - x_0| < 1$ έχουμε ότι

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |x_0| \quad (2)$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} |x^2 + xx_0 + x_0^2| &\leq x^2 + |x| |x_0| + x_0^2 \stackrel{(2)}{<} \\ &< (1 + |x_0|)^2 + (1 + |x_0|) |x_0| + x_0^2 = \dots = \\ &= 1 + 3|x_0| + 3x_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Από (1), (3) έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 4(1 + 3|x_0| + 3x_0^2) |x - x_0|$$

για κάθε x με $|x - x_0| < 1$.

Οπότε θέτοντας $M = 4(1 + 3|x_0| + 3x_0^2)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

για κάθε x με $|x - x_0| < 1$.

Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση.

Υπόδ. Συνεχίζουμε όπως στο ??ο λυμένο, με $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{M}\}$.

Άσκηση 7.

Εξετάστε ως προς την συνέχεια

α) Την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$

β) Την $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι

εάν $x \in [0, 1)$ τότε $f(x) = [x] = 0$

εάν $x \in [1, 2)$ τότε $f(x) = [x] = 1$

$\vdots$

εάν $x \in [n, n+1)$ όπου $n \in \mathbb{N}$, τότε $f(x) = [x] = n$

Επίσης

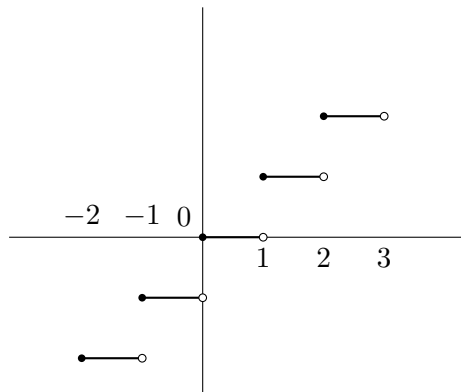
εάν $x \in [-1, 0)$ τότε $f(x) = [x] = -1$

εάν $x \in [-2, -1)$ τότε $f(x) = [x] = -2$

$\dots$

Είναι σαφές ότι εάν $k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$f(x) = [x] = k, \text{ για κάθε } x \in [k, k+1)$$



Θα δείξουμε ότι

i) f ασυνεχής σε κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και

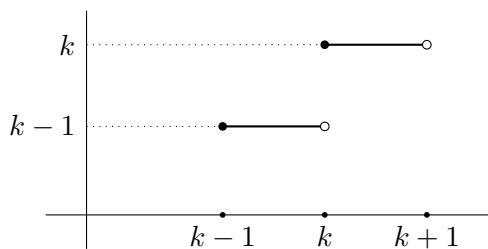
ii) f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Για το (i) έχουμε

Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$f(x) = k - 1 \text{ για κάθε } x \in [k - 1, k) \text{ και}$$

$$f(x) = k \text{ για κάθε } x \in [k, k + 1)$$



Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο k .

Έστω (x_n) με $x_n = k - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον $x_n \rightarrow k$ και f συνεχής στο k , από την Α.Μ. έπεται ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(k) = k \quad (1)$$

Τώρα εφόσον $x_n = k - \frac{1}{n} \in [k-1, k) \Rightarrow f(x_n) = k-1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς

$$f(x_n) \rightarrow k-1 \quad (2)$$

Από (1), (2) και μοναδικότητα ορίου έχουμε ότι $k = k-1$. Προφανώς άτοπο.

Για το (ii) έχουμε

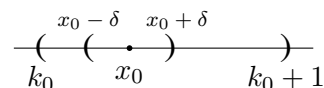
Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Εφόσον $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow k_0 < x_0 < k_0 + 1$ όπου $k_0 = [x_0]$.

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός.

Εφόσον $k_0 < x_0 < k_0 + 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (k_0, k_0 + 1)$$



(ένα τέτοιο δ είναι το $\delta = \min\{x_0 - k_0, k_0 + 1 - x_0\}$)

Παρατηρούμε ότι

$$\text{εάν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow x \in (k_0, k_0 + 1)$$

και συνεπώς

$$|f(x) - f(x_0)| = |k_0 - k_0| = 0 < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

β' τρόπος

Έστω $h = f|_{(k_0, k_0 + 1)}$. Τότε $h(x) = k_0$ για κάθε $x \in (k_0, k_0 + 1)$ κι άρα η h συνεχής ως σταθερή.

Εφόσον h συνεχής, το $(k_0, k_0 + 1)$ ανοικτό διάστημα, έχουμε ότι η f συνεχής σε κάθε $x \in (k_0, k_0 + 1)$ (6.4.6 (β_1)) κι άρα f συνεχής στο x_0 .

β) Παρατηρούμε ότι

$$\text{εάν } x \in [0, 1) \text{ τότε } g(x) = x - [x] = x - 0 = x$$

$$\text{εάν } x \in [1, 2) \text{ τότε } g(x) = x - [x] = x - 1$$

...

εάν $x \in [n, n+1)$ όπου $n \in \mathbb{N}$ τότε $g(x) = x - [x] = x - n$

Επίσης

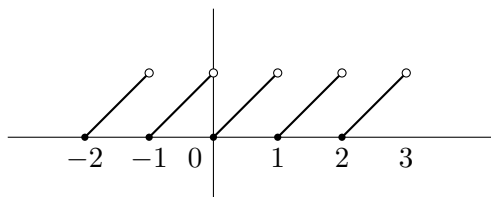
εάν $x \in [-1, 0)$ τότε $g(x) = x - [x] = x + 1$

εάν $x \in [-2, -1)$ τότε $g(x) = x - [x] = x + 2$

...

Γενικότερα εάν $k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$g(x) = x - k, \text{ για κάθε } x \in [k, k+1)$$



Θα δ.ο.

i) g ασυνεχής σε κάθε $k \in \mathbb{Z}$

ii) g συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Για το (i) έχουμε

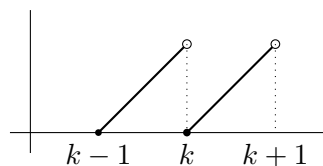
Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Προς άτοπο έστω ότι η g συνεχής στο k .

Έστω $x_n = k - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Είναι σαφές ότι $x_n \rightarrow k$ και $x_n \in [k-1, k)$.

Εφόσον g συνεχής στο k , από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$g(x_n) \rightarrow g(k) = k - [k] = 0 \quad (3)$$



Επίσης εφόσον $x_n \in [k-1, k)$ έχουμε ότι

$$g(x_n) = x_n - [x_n] = k - \frac{1}{n} - (k-1) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad (4)$$

Από (3), (4) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έχουμε ότι $1 = 0$. Προφανώς άτοπο.

Για το (ii) έχουμε

Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $k_0 = [x_0]$. Είναι σαφές ότι $x_0 \in (k_0, k_0+1)$.

Έστω $h = g|_{(k_0, k_0+1)}$. Τότε

$$h : (k_0, k_0+1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = g(x) = x - [x] = x - k_0$$

για κάθε $x \in (k_0, k_0+1)$.

Εφόσον η h συνεχής (γιατί?), το (k_0, k_0+1) είναι ανοικτό διάστημα, έπεται ότι η g συνεχής σε κάθε $x \in (k_0, k_0+1)$, άρα και στο x_0 (6.4.6 (β_1)).

β' τρόπος για το (i), (ii) με χρήση του (α)

Εάν $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$g = h - f$$

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ εφόσον οι h, f συνεχείς στο x_0 , έπεται ότι η g συνεχής στο x_0 (6.3.1 (α) και (β)).

Έστω $x_0 \in \mathbb{Z}$. Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η g συνεχής στο x_0 .

Εφόσον $f = h - g$ και οι g, h συνεχείς στο x_0 , από 6.3.1 (α), (β) έχουμε ότι η f συνεχής στο x_0 .

Άτοπο. Άρα g ασυνεχής στο x_0 .

Άσκηση 8.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε με τον ορισμό ότι η f συνεχής.

Λύση.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θ.δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) $x_0 = 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{εάν } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ με } |x - 0| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(0)| = \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \\ &= |x| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

ενώ για $x = 0$ είναι $|f(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon$. Άρα η f συνεχής στο 0.

ii) $x_0 \neq 0$

Παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - x_0 \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| = \\ &= \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - x \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) + x \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) - x_0 \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| \\ &\leq \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - x \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| + \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) - x_0 \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| \\ &= |x| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| + |x - x_0| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| \\ &\leq |x| \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| + |x - x_0| \\ &= |x| \frac{|x - x_0|}{|x| |x_0|} + |x - x_0| = \left(\frac{1}{|x_0|} + 1 \right) |x - x_0| \quad (1) \end{aligned}$$

Ας δείξουμε τώρα ότι η f συνεχής στο x_0 .

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε δ το οποίο να εξαρτάται από τα ε , x_0 και να είναι τέτοιο ώστε εάν $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$\text{i) } x \neq 0 \quad \text{και} \quad \text{ii) } \left(\frac{1}{|x_0|} + 1 \right) |x - x_0| < \varepsilon$$

Ένα τέτοιο δ είναι το

$$\delta = \min \left\{ |x_0|, \frac{\varepsilon}{\frac{1}{|x_0|} + 1} \right\}$$

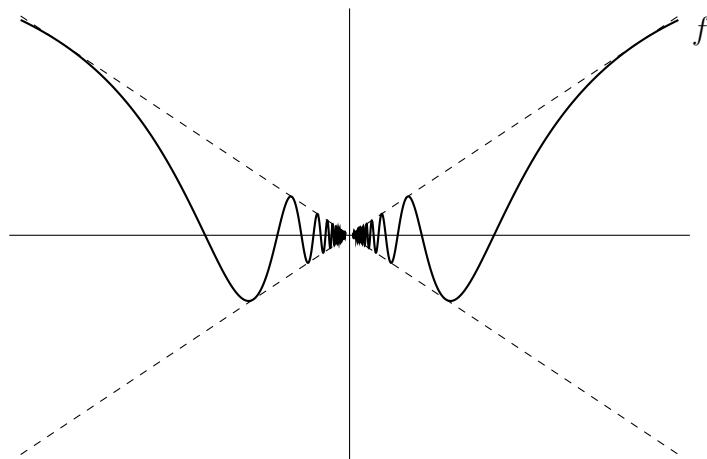
Πράγματι παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε κατ' αρχάς $x \neq 0$

(αφού εάν $x = 0 \xrightarrow{|x-x_0|<\delta} |x_0| < \delta \leq |x_0| \Rightarrow |x_0| < |x_0|$ άτοπο)

Επίσης από (1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \left(\frac{1}{|x_0|} + 1\right) |x - x_0| < \\ &< \left(\frac{1}{|x_0|} + 1\right) \delta \leq \left(\frac{1}{|x_0|} + 1\right) \frac{\varepsilon}{\frac{1}{|x_0|} + 1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .



Άσκηση 9.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του ορισμού δ.ο.

- 1) Η f συνεχής σε κάθε $x \neq 0$
- 2) Η f ασυνεχής στο 0

Λύση.

1) Έστω $x_0 \neq 0$. Θ.δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \eta\mu\left(\frac{1}{x_0}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \\ &= \frac{|x - x_0|}{|x| |x_0|} = \frac{1}{|x|} \frac{|x - x_0|}{|x_0|} \quad (1) \end{aligned}$$

(Προσπαθούμε τώρα να βρούμε $\rho > 0$, $M > 0$ ώστε εάν $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ ($\Leftrightarrow |x - x_0| < \rho$) τότε $\frac{1}{|x|} \leq M$.)

Παρατηρούμε ότι εάν x με $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$ τότε

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2} &\Rightarrow |x_0| - |x| < \frac{|x_0|}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_0| - \frac{|x_0|}{2} < |x| \Rightarrow \frac{|x_0|}{2} < |x| \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|x_0|} \quad (2) \end{aligned}$$

Ας δείξουμε τώρα ότι η f συνεχής στο x_0 .

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^2 \varepsilon}{2} \right\}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$.

Επειδή $\delta \leq \frac{|x_0|}{2} \Rightarrow |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2} \xRightarrow{(2)} \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|x_0|}$ (οπότε και $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{(1)} |f(x) - f(x_0)| < \frac{2}{|x_0|} \frac{|x - x_0|}{|x_0|} \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{2}{|x_0|^2} \cdot |x - x_0| < \\ &< \frac{2}{|x_0|^2} \delta \leq \underset{\text{αφού } \delta \leq \frac{|x_0|^2 \varepsilon}{2}}{\leq} \frac{2}{|x_0|^2} \frac{|x_0|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ δείξαμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{εάν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Οπότε η f συνεχής στο x_0 .

2) Για να δ.ο. η f ασυνεχής στο 0 με τον ορισμό, πρέπει να δ.ο.

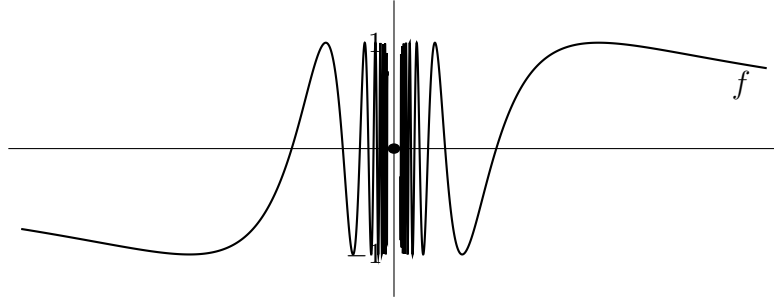
“υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει
 x με $|x - 0| < \delta$ και $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \geq \varepsilon$ ”

Για $\varepsilon = 1$ έχουμε: Έστω $\delta > 0$. Αφού η ακολουθία $\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$
 ώστε $\frac{1}{2n_0\pi + \frac{\pi}{2}} < \delta$.

Εάν $x = \frac{1}{2n_0\pi + \pi/2}$ τότε $|x| < \delta$ και

$$|f(x)| = |\sin(2n_0\pi + \pi/2)| = 1 \geq \varepsilon$$

Άρα η f ασυνεχής στο 0.



Άσκηση 10.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

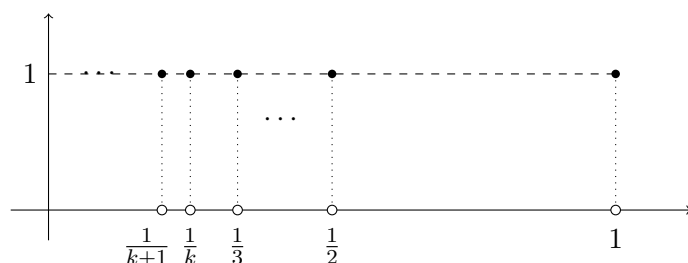
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x \in \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots\} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

- i) Η f ασυνεχής στο 0
- ii) Η f ασυνεχής στο $\frac{1}{k}$ για κάθε $k \geq 1$
- iii) Η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus (\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$

Λύση.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η γεωμετρική παράσταση της f είναι η ακόλουθη.



i) α' τρόπος (με την αρχή μεταφοράς)

Έστω ότι η f συνεχής στο 0. Τότε εφόσον $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow f(0) = 0$$

Αλλά $f\left(\frac{1}{k}\right) = 1$ για κάθε $k \geq 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow 1$.

Άρα από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έχουμε ότι

$$0 = 1$$

Άτοπο.

β' τρόπος (με τον ορισμό)

Διαισθητικά παρατηρούμε ότι δεδομένου ότι $f(0) = 0$ και καθώς το n μεγαλώνει το $\frac{1}{n}$ πλησιάζει στο 0, έχουμε ότι όσο κοντά θέλουμε στο 0 μπορούμε να βρούμε τιμές της συνάρτησης ίσες με 1, δηλαδή όσο κοντά θέλουμε στο 0 μπορούμε να βρούμε x ώστε $f(x) = 1$ και άρα $|f(x) - f(0)| = 1$.

Οπότε τουλάχιστον διαισθητικά είναι σαφές ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Ας το αποδείξουμε αυτό.

Θέτουμε $\varepsilon = 1$. Έστω $\delta > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$.

Άρα για $x = \frac{1}{n_0}$ έχουμε ότι

$$x \in (-\delta, \delta) \text{ και } |f(x) - f(0)| = \left| f\left(\frac{1}{n_0}\right) - f(0) \right| = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon$$

Οπότε δείξαμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για οποιοδήποτε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in (-\delta, \delta)$ με

$$|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$$

Άρα η f ασυνεχής στο 0.

ii) Έστω $k \geq 1$. Θα δ.ο. η f ασυνεχής στο $\frac{1}{k}$.

α' τρόπος

Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε x από τα "αριστερά" του $\frac{1}{k}$ τέτοιο ώστε

$$\max \left\{ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} - \delta \right\} < x < \frac{1}{k}$$

Εφόσον $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, το x δεν είναι της μορφής $\frac{1}{m}$ κι άρα $f(x) = 0$.

Τότε

$$|f(x) - f\left(\frac{1}{k}\right)| = |0 - 1| = 1$$

Άρα δείξαμε ότι εάν $\varepsilon = 1$ τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \left(\frac{1}{k} - \delta, \frac{1}{k} + \delta\right)$ με $|f(x) - f\left(\frac{1}{k}\right)| \geq \varepsilon$.

Συνεπώς η f ασυνεχής στο $\frac{1}{k}$.

β' τρόπος

Έστω η ακολουθία $x_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Έχουμε ότι $x_n \rightarrow \frac{1}{k}$ και άρα εάν υποθέσουμε ότι η f συνεχής στο $\frac{1}{k}$ τότε από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = 1$.

Παρατηρούμε όμως ότι εφόσον $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

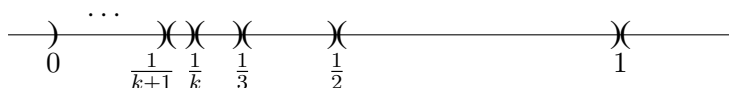
$$\frac{1}{k+1} < x_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $f(x_n) = 0$.

Συνεπώς $f(x_n) \rightarrow 0$. Άτοπο από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας.

iii) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right) &= \\ &= (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right) \cup \dots \\ &= (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right) \right) \end{aligned}$$



Η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Πράγματι έστω $g = f|_{(-\infty, 0)}$. Τότε

$$g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = 0, x \in (-\infty, 0)$$

Η g είναι συνεχής, δηλ. ο περιορισμός της f στο ανοικτό διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής. Άρα η f συνεχής στα σημεία του $(-\infty, 0)$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι η f συνεχής στα σημεία του $(1, +\infty)$ και του $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ για κάθε $k \geq 1$.

Άρα η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus (\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$.

Άσκηση 11.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{εάν } x \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots\} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

- i) Η f συνεχής στο 0
- ii) Η f ασυνεχής στο $\frac{1}{k}$ για κάθε $k \geq 1$
- iii) Η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus (\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι

$$f(1) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \dots, f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}, \dots$$

και $f(x) = 0$ για κάθε $x \notin \{\frac{1}{k} : k \geq 1\}$.

i) Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \varepsilon$ παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| \begin{cases} \overline{\overline{x \in \{1, \frac{1}{2}, \dots\}}} & |x| < \delta = \varepsilon \\ \overline{\overline{\text{διαφορ.}}} & 0 < \varepsilon \end{cases}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$\text{εάν } |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο 0.

ii), iii) Αφήνονται ως άσκηση (παρόμοια με το προηγούμενο λυμένο).

Υπόδ. Για το (ii) πάρε $x_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$ όπως στο ??ο λυμένο (ii) β' τρόπος· τότε $f(x_n) \rightarrow 0 \neq \frac{1}{k} = f\left(\frac{1}{k}\right)$. Για το (iii) όπως στο ??ο λυμένο (iii).

Άσκηση 12.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{εάν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{εάν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

- i) Η f είναι συνεχής στο 0
- ii) Η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$

Λύση.

i) Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \varepsilon$ παρατηρούμε ότι

$$\text{εάν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - 0| < \delta \text{ τότε}$$

$$\text{αν } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(0)| \stackrel{x \in \mathbb{Q}}{f(0)=0} |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

$$\text{και αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(0)| \stackrel{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{|0 - 0|} = 0 < \varepsilon$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$\text{εάν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

Συνεπώς η f συνεχής στο 0.

ii) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0 \neq 0$. Θ.δ.ο. η f ασυνεχής στο x_0 .

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και έστω (q_n) ακολουθία ρητών, (τ_n) ακολουθία αρρήτων ώστε $q_n \rightarrow x_0$ και $\tau_n \rightarrow x_0$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 , από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \rightarrow f(x_0) \quad (1)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι εάν $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$f(q_n) \stackrel{q_n \in \mathbb{Q}}{=} q_n \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \stackrel{\tau_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{=} 0$$

Άρα

$$f(q_n) = q_n \rightarrow x_0 \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \rightarrow 0 \quad (2)$$

Από (1), (2) και την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έχουμε ότι

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{και} \quad f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Άτοπο εφόσον $x_0 \neq 0$.

Άρα η f ασυνεχής στο x_0 .

Άσκηση 13.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Εξετάστε την f ως προς την συνέχεια.

Λύση.

Θα δείξουμε ότι

- i) η f συνεχής στο $\frac{1}{2}$
- ii) η f ασυνεχής σε κάθε $x \neq \frac{1}{2}$

Για το (i) έχουμε

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \varepsilon$ παρατηρούμε ότι

$$\text{εάν } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - \frac{1}{2}| < \delta \text{ τότε}$$

$$\begin{aligned} \text{αν } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(\frac{1}{2})| &\stackrel{\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}}{=} |f(x) - (1 - \frac{1}{2})| = \\ &= |f(x) - \frac{1}{2}| \stackrel{x \in \mathbb{Q}}{=} |1 - x - \frac{1}{2}| = \\ &= |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(\frac{1}{2})| &= |f(x) - \frac{1}{2}| \\ &\stackrel{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{=} |x - \frac{1}{2}| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - \frac{1}{2}| < \delta$ έπεται ότι

$$|f(x) - f(\frac{1}{2})| < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο $\frac{1}{2}$.

Για το (ii) έχουμε

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0 \neq \frac{1}{2}$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .

Έστω (q_n) ακολουθία ρητών και (τ_n) ακολουθία αρρήτων ώστε

$$q_n \rightarrow x_0 \text{ και } \tau_n \rightarrow x_0$$

Εφόσον η f συνεχής στο x_0 από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \text{ και } f(\tau_n) \rightarrow f(x_0) \quad (1)$$

Επίσης επειδή $q_n \in \mathbb{Q}$, $\tau_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$f(q_n) = 1 - q_n, \quad f(\tau_n) = \tau_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα εφόσον $q_n \rightarrow x_0$, $\tau_n \rightarrow x_0 \Rightarrow$

$$f(q_n) \rightarrow 1 - x_0 \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \rightarrow x_0 \quad (2)$$

Από (1), (2) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έπεται ότι

$$1 - x_0 = f(x_0) \quad \text{και} \quad x_0 = f(x_0)$$

και άρα $1 - x_0 = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

Άτοπο εφόσον $x_0 \neq \frac{1}{2}$.

Άρα η f ασυνεχής στο x_0 .

Άσκηση 14.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Εξετάστε την f ως προς την συνέχεια.

Λύση.

Θ.δ.ο.

i) f συνεχής στα 0, 1

ii) f ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0, 1$

Για το (i) έχουμε

Ας δείξουμε πρώτα ότι η f συνεχής στο 0.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \min\{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\}$.

Τότε εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < \delta$ έχουμε ότι

$$\text{εάν } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |x - 0| < \delta \leq \varepsilon$$

$$\text{εάν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |x^2| < \delta^2 \leq \varepsilon$$

Άρα σε κάθε περίπτωση εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < \delta$, έχουμε ότι $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Οπότε η f συνεχής στο 0.

Ας δείξουμε τώρα ότι η f συνεχής στο 1.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$.

Τότε εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 1| < \delta$ έχουμε ότι

$$\text{εάν } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(1)| = |x - 1| < \delta \leq \varepsilon/3 < \varepsilon$$

$$\text{εάν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(1)| = |x^2 - 1| = |x + 1| |x - 1| \leq$$

$$\leq (|x| + 1) |x - 1| \underset{\substack{\text{αφού } |x-1| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow |x|+1 < 3}}{<} 3 \cdot |x - 1| < 3\delta \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα σε κάθε περίπτωση εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 1| < \delta$, ισχύει ότι $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$. Άρα η f συνεχής στο 1.

Για το (ii) έχουμε

Έστω $x_0 \neq 0, 1$ κι έστω ότι η f συνεχής στο x_0 .

Από πυκνότητα ρητών και αρρήτων έχουμε ότι υπάρχουν $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $q_n \rightarrow x_0$ και $\tau_n \rightarrow x_0$.

Από Α.Μ. για συνεχείς συναρτήσεις έπεται ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \quad (1), \quad f(\tau_n) \rightarrow f(x_0) \quad (2)$$

Επίσης έχουμε ότι

$$f(q_n) \stackrel{q_n \in \mathbb{Q}}{\longrightarrow} q_n \rightarrow x_0 \quad (3) \quad \text{και}$$

$$f(\tau_n) \stackrel{\tau_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{\longrightarrow} \tau_n^2 \rightarrow x_0^2 \quad (4)$$

Από (1), (3) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έπεται ότι

$$f(x_0) = x_0$$

Όμοια από (2), (4) έχουμε ότι $f(x_0) = x_0^2$.

Άρα $x_0 = f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow x_0 = 0$ ή 1 . Άτοπο.

Άρα η f ασυνεχής στο x_0 .

Άσκηση 15.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

α) Εάν $f(x_0) > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

β) Εάν $f(x_0) > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχουν ρ, δ θετικά ώστε $f(x) > \rho$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

γ) Εάν $f(x_0) < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\rho < 0$, $\delta > 0$ ώστε $f(x) < \rho$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Λύση.

(Το (α) είναι η Πρόταση 6.4.3 (1) της θεωρίας, για $X = \mathbb{R}$.)

α) Έστω $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) - \varepsilon_0 > 0$

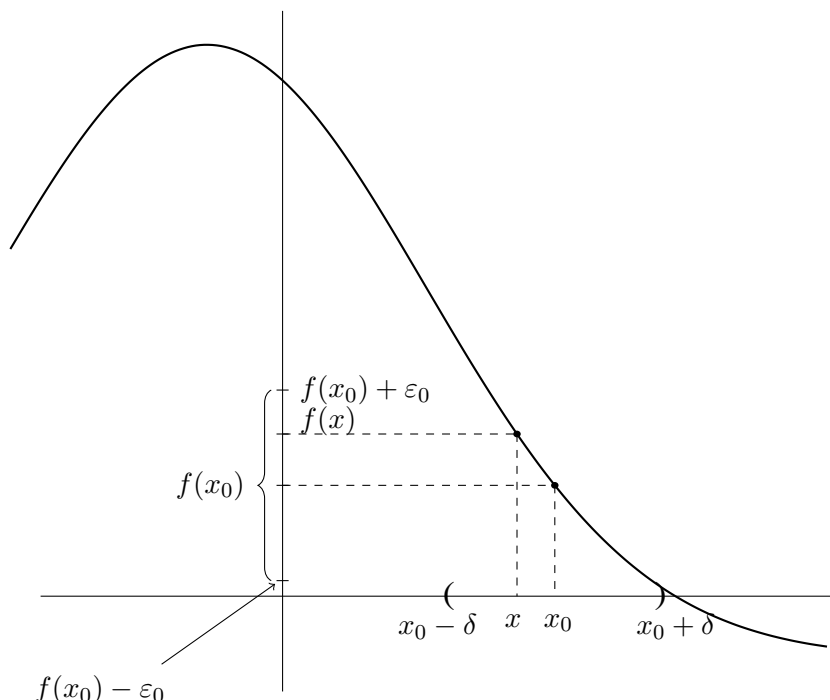
(για παράδειγμα $\varepsilon_0 = \underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{\text{αφού } f(x_0) > 0}$)

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$$

$$f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \xrightarrow{f(x_0) - \varepsilon_0 > 0}$$

$$0 < f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



β) Εφόσον η f συνεχής, για $\varepsilon_0 = \underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{\text{αφού } f(x_0) > 0} > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Θέτοντας $\rho = \frac{f(x_0)}{2}$ έχουμε ότι $\rho > 0$ και

$$f(x) > \rho, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

γ) Εφόσον f συνεχής, για $\varepsilon_0 = -\underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{\text{αφού } f(x_0) < 0} > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$$

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon_0 = \frac{f(x_0)}{2}, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Άρα θέτοντας $\rho = \frac{f(x_0)}{2}$ έχουμε ότι $\rho < 0$ και

$$f(x) < \rho, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Άσκηση (Είναι σημαντικό να γίνει)

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.

α) Αν $f(x_0) < a$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) < a \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

β) Αν $f(x_0) > a$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > a \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Υπόδειξη: α) Πάρε $\varepsilon_0 > 0$ τ.ω. $f(x_0) + \varepsilon_0 \leq a$

$$\text{π.χ. } \varepsilon_0 = \frac{a - f(x_0)}{2} \quad \text{ή } \varepsilon_0 = a - f(x_0)$$

β) Πάρε $\varepsilon_0 > 0$ τ.ω. $f(x_0) - \varepsilon_0 \geq a$

$$\text{π.χ. } \varepsilon_0 = \frac{f(x_0) - a}{2} \quad \text{ή } \varepsilon_0 = f(x_0) - a$$

Άσκηση 16.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

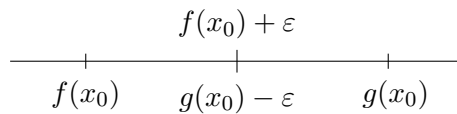
$$f(y) \neq g(z), \quad \forall y, z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Λύση.

Έστω ότι $f(x_0) < g(x_0)$.

Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $f(x_0) + \varepsilon \leq g(x_0) - \varepsilon$.

Για παράδειγμα $\varepsilon = \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$.



Εφόσον f, g συνεχείς στο x_0 , υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ με } x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \quad (1)$$

και

$$g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ με } x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \quad (2)$$

Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και $y, z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Εφόσον $\delta \leq \delta_1$, έχουμε ότι $y \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \xRightarrow{(1)}$

$$f(y) < f(x_0) + \varepsilon$$

Όμοια από (2) έχουμε ότι $g(x_0) - \varepsilon < g(z)$.

Οπότε

$$f(y) < f(x_0) + \varepsilon \leq g(x_0) - \varepsilon < g(z) \Rightarrow$$

$$f(y) \neq g(z)$$

Παρατήρηση – Υπενθύμιση

– Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in X$.

Εάν βρούμε $(x_n) \subseteq X$ ώστε

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ και } f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$$

τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

[Πράγματι έστω προς άτοπο ότι η f συνεχής στο x_0 . Τότε από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ., εφόσον $x_n \rightarrow x_0$ έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Άτοπο αφού $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$.]

– Έχουμε δει παραδείγματα εφαρμογής του παραπάνω στο παράδειγμα 6.2.5 (α) ο γ' τρόπος, στο 6.2.5 (β ii) ο β' τρόπος καθώς και στα λυμένα.

– Άλλα παραδείγματα είναι τα εξής

$$1) f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Τότε εάν $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$x_n \rightarrow 0 \text{ και } f(x_n) = \eta\mu\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

κι άρα $f(x_n) \rightarrow 1 \neq 0 = f(0)$.

$$2) f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Εδώ η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στο μηδέν αλλά $f(x_n) \rightarrow 0 \neq 1 = f(0)$.

$$3) f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x-a}\right) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \quad \text{όπου } a \in \mathbb{R}$$

Τότε εάν $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + a$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$x_n \rightarrow a \text{ και } f(x_n) = \eta\mu\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ κι άρα}$$

$$f(x_n) \rightarrow 1 \neq 0 = f(a)$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Πάρε $x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_n \rightarrow 0$ και

$$f(x_n) \rightarrow 1 \neq 0 = f(0)$$

$$5) \text{ Για } f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ πάρε } x_n = \frac{1}{2n\pi}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x-a}\right) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}, \text{ πάρε } x_n = \frac{1}{2n\pi} + a$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ πάρει } x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}$$

Άσκηση 17.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x^k}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

όπου k θετικός ακέραιος αριθμός. Αποδείξτε ότι η f όχι συνεχής στο 0.

Λύση.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο 0.

Έστω η ακολουθία (x_n) με

$$x_n = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)^{1/k}$$

Τότε $x_n \rightarrow 0$. Συνεπώς εφόσον η f συνεχής στο 0, από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(0) = 0$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x_n) = \eta\mu\left(\frac{1}{x_n^k}\right) = \eta\mu\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Οπότε $f(x_n) \rightarrow 1$. Άτοπο σύμφωνα με την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας.

Επιπλέον ερώτημα

Αποδείξτε ότι η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Λύση.

Έστω $g = f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$, δηλ. $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x^k}\right), \quad x \neq 0$$

Η g συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \\ w : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } w(x) = \frac{1}{x^k}, \quad x \neq 0$$

Από το 6.4.6 (β_1), εφόσον το $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι ίσο με ένωση ανοικτών διαστημάτων και η $g = f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ συνεχής, έπεται ότι η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Άσκηση 18.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x^k}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Να εξετασθεί η f ως προς την συνέχεια.

Λύση.

Παρόμοια με την προηγούμενη και αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Πάρε $x_n = (\frac{1}{2n\pi})^{1/k}$. Τότε $x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0 \rightarrow 0 \neq 0 = f(0)$, άρα η f ασυνεχής στο 0. Στα $x \neq 0$ η f είναι συνεχής, όπως στο επιπλέον ερώτημα του ??ου λυμένου.

Άσκηση 19.

Εξετάστε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως προς την συνέχεια στο $x_0 \in \mathbb{R}$ όταν

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 3x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} 3(x-5) \eta\mu\left(\frac{1}{x-5}\right), & x \neq 5 \\ 0 & x = 5 \end{cases}, \quad x_0 = 5$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} 3x \eta\mu\left(\frac{1}{x-5}\right), & x \neq 5 \\ 0 & x = 5 \end{cases}, \quad x_0 = 5$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 4x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 4x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

Λύση.

$\alpha)$ Η f είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon/3$ έχουμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| 3x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = |3x| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \\ &\leq 3|x| < 3\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

(για $x \neq 0$, ενώ για $x = 0$ είναι $|f(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon$). Άρα η f συνεχής στο 0.

$\beta)$ Η f είναι συνεχής στο 5.

Η απόδειξη όπως στο (α) .

$\gamma)$ Παρατηρούμε ότι εάν

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + 5, \quad n \in \mathbb{N}$$

τότε επειδή $x_n \rightarrow 5$, εάν υποθέσουμε ότι η f συνεχής στο 5, από την Α.Μ. $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ έπεται ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(5) = 0$$

Αλλά $f(x_n) = 3x_n \eta\mu\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot x_n \rightarrow 3 \cdot 5 = 15$ και συνεπώς από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έχουμε ότι $0 = 15$. Άτοπο.

Άρα η f όχι συνεχής στο 5.

$\delta)$ Η f είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Έστω $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Τότε εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 4x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \\ &\leq |x| \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| + 4|x| \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \stackrel{\substack{|\eta\mu y| \leq 1 \text{ και} \\ |\sigma\upsilon\nu y| \leq 1}}{\leq} \\ &\leq |x| + 4|x| = 5|x| < 5\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

(για $x \neq 0$, ενώ για $x = 0$ είναι $|f(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon$). Άρα η f συνεχής στο 0.

ε) Η f είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Θέτουμε $\delta = \min \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{8} \right\}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$. Τότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 4x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \\ &\leq x^2 \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| + 4|x| \left| \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \\ &\leq x^2 + 4|x| < \delta^2 + 4\delta \leq \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^2 + 4 \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon \end{aligned}$$

(για $x \neq 0$, ενώ για $x = 0$ είναι $|f(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon$). Άρα η f συνεχής στο 0.

Άσκηση 20.

Εξετάστε ως προς την συνέχεια της $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $x_0 = 0$ όπου

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} k|x|^a \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda|x|^a \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

όπου $a > 0, k, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} k|x|^a \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda|x|^b \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

όπου $a, b > 0$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Χρησιμοποίησε ότι $|\eta\mu y| \leq 1, |\sigma\upsilon\nu y| \leq 1$.

$\alpha)$ $|f(x) - f(0)| \leq (|k| + |\lambda|)|x|^a$ για $x \neq 0$. μετά όπως στο ??ο λυμένο (α).

$\beta)$ $|f(x) - f(0)| \leq |k||x|^a + |\lambda||x|^b$. πάρε $\delta = \min \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} \right)^{1/a}, \left(\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} \right)^{1/b} \right\}$.

Παρατήρηση

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

α) Αν οι f, g συνεχείς στο x_0 τότε οι $f + g, f \cdot g$ συνεχείς στο x_0 .

β) Αν η f συνεχής στο x_0 και η g ασυνεχής στο x_0 τότε

i) Η $f + g$ ασυνεχής στο x_0

ii) Εάν $f(x_0) \neq 0$, η fg ασυνεχής στο x_0

γ) Αν οι f, g ασυνεχείς στο x_0 τότε οι $f + g, fg$ μπορεί να είναι συνεχείς στο x_0 , μπορεί και όχι.

Απόδειξη του (β)

i) Έστω $h = f + g$ και έστω ότι η h είναι συνεχής στο x_0 . Άρα η $h - f$ συνεχής στο x_0 εφόσον και οι δύο συνεχείς στο x_0 .

Συνεπώς εφόσον $g = h - f$ έχουμε ότι η g συνεχής στο x_0 . Άτοπο.

ii) Ανάλογα δουλεύουμε για $h = fg$.

Παρατήρηση

Στο (ii) γράφουμε $g = \frac{h}{f}$, κάτι που έχει νόημα μόνο στα σημεία όπου $f \neq 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) \neq 0$, από την Πρόταση 6.4.3 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Τότε στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $g = \frac{h}{f}$ και, αν η h ήταν συνεχής στο x_0 , από 6.3.1 (δ) ο περιορισμός $g|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$ θα ήταν συνεχής στο x_0 . Επειδή το $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ είναι ανοικτό διάστημα, από 6.4.6 (β) η g θα ήταν συνεχής στο x_0 . Άτοπο.

Αντιπαραδείγματα για το (γ)

1) Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Τότε οι f, g ασυνεχείς στο 0. Επίσης έχουμε ότι

$$(f + g)(x) = 0, \quad (fg)(x) = -1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δηλ. οι $f + g, f \cdot g$ σταθερές συναρτήσεις κι άρα συνεχείς.

2) Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Τότε οι f, g ασυνεχείς σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά οι $f + g, f \cdot g$ συνεχείς σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 21.

Εξετάστε την συνέχεια της $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο x_0 όταν

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right), & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} 3x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} 3x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

Λύση.

(α), (β) αφήνονται ως άσκηση.

Υπόδ. α) Πάρε $x_n = \frac{1}{2n\pi}$. τότε $f(x_n) = 1 \rightarrow 1 \neq 0$. β) Πάρε $x_n = 1 + \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. τότε $f(x_n) = 1 \rightarrow 1 \neq 0$.

δ) Θα δ.ο. η f ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Έστω η ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

Εφόσον f συνεχής και $x_n \rightarrow 0$, από την Α.Μ. ((α)⇒(β)) έχουμε ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(0) = 0 \quad (1)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 3x_n^2\eta\mu\left(\frac{1}{x_n^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \\ &= 3x_n^2\eta\mu((2n\pi)^2) - \sin(2n\pi) \\ &= 3x_n^2\eta\mu(4n^2\pi^2) - 1 \end{aligned}$$

Εφόσον $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n^2 \rightarrow 0$.

Επίσης η ακολουθία $(\eta\mu(4n^2\pi^2))$ είναι φραγμένη.

Οπότε

$$f(x_n) \rightarrow 3 \cdot 0 - 1 = -1 \quad (2)$$

Από (1), (2) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι $-1 = 0$. Άτοπο.

Άρα η f ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

γ) Υπόδ. Πάρε $x_n = \frac{1}{2n\pi}$.

ε) Υπόδ. Πάρε $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$.

Υπενθύμιση από τα λυμένα προβλήματα 60, 61, 63 του κεφ. 3

1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ με $q_n \rightarrow x$.

Απόδειξη.

α' τρόπος

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από πυκνότητα ρητών, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$ με $x - \frac{1}{n} < q_n < x$.

Εφόσον $\underbrace{x - \frac{1}{n}}_{\rightarrow x} < q_n < x, \forall n \Rightarrow q_n \rightarrow x$.

β' τρόπος

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $m_n = [nx], n \in \mathbb{N}$.

Τότε

$$\begin{aligned} nx - 1 &< m_n \leq nx \Rightarrow \\ x - \frac{1}{n} &< \frac{m_n}{n} \leq x, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Οπότε εφόσον $x - \frac{1}{n} \rightarrow x$, από κριτήριο ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\frac{m_n}{n} \rightarrow x$.

Θέτοντας $q_n = \frac{m_n}{n}, n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $q_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $q_n \rightarrow x$.

2) Έστω $A = \left\{ \frac{m}{n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Ν.δ.ο. για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $(a_n) \subseteq A$ ώστε $a_n \rightarrow x$.

Λύση.

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$m_n = [n^2 x]$$

Τότε

$$\begin{aligned} n^2 x - 1 &< m_n \leq n^2 x \Rightarrow \\ x - \frac{1}{n^2} &< \frac{m_n}{n^2} \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Άρα εφόσον $x - \frac{1}{n^2} \rightarrow x \Rightarrow \frac{m_n}{n^2} \rightarrow x$.

Θέτοντας $a_n = \frac{m_n}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $(a_n) \subseteq A$ και $a_n \rightarrow x$.

3) Εάν $A = \left\{ \frac{m}{\sqrt{n}} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ ή $A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ τότε όπως στο (2) μπορούμε να δ.ο.

$$“\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n) \subseteq A \text{ με } a_n \rightarrow x”$$

4) Ορισμός

Ένα $D \subseteq \mathbb{R}$ θα καλείται **πυκνό** στο $\mathbb{R}$ εάν

$$“\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ υπάρχει } (x_n) \subseteq D \text{ ώστε } x_n \rightarrow x”$$

Π.χ. Από τα (1)–(3) έχουμε ότι τα σύνολα

$$\mathbb{Q}, \quad \left\{ \frac{m}{n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{m}{\sqrt{n}} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$.

5) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $\tau_n \rightarrow x$.

Απόδειξη.

Όπως στον α' τρόπο του (1).

Άσκηση 22.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Αποδείξτε ότι

α) Αν $f(q) = 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ τότε

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Εάν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(q) = g(q)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$ τότε $f = g$

γ) Εάν $f(q) = q^2 - q^3$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ τότε

$$f(x) = x^2 - x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Εάν $f(q) = q^4$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ αποδείξτε ότι

$$f(\sqrt{2}) = 4$$

Λύση.

α) α' τρόπος

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από πυκνότητα ρητών, υπάρχει (q_n) ακολουθία ρητών ώστε $q_n \rightarrow x$. Εφόσον η f συνεχής, από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x) \quad (1)$$

Επίσης εφόσον $q_n \in \mathbb{Q}$, από την υπόθεση έχουμε ότι $f(q_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα

$$f(q_n) \rightarrow 0 \quad (2)$$

Από (1), (2) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έχουμε ότι $f(x) = 0$.

β' τρόπος

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. $f(x_0) = 0$.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι $f(x_0) \neq 0$. Άρα $f(x_0) > 0$ ή $f(x_0) < 0$.

Έστω $f(x_0) > 0$ (ανάλογα εάν $f(x_0) < 0$). Όπως στο ??ο λυμένο, έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (3)$$

Από την πυκνότητα των ρητών, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $q \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Οπότε από (3) έχουμε ότι $f(q) > 0$. Άτοπο εφόσον από υπόθεση $f(q) = 0$.

β) Έστω η $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Εφόσον f, g συνεχείς $\Rightarrow$ η $h = f - g$ συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επίσης από υπόθεση

$$h(q) = f(q) - g(q) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Άρα ακριβώς όπως στο (α) μπορούμε να δ.ο.

$$h(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Όπως το (β) για $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Από πυκνότητα ρητών, υπάρχει (q_n) ακολουθία ρητών ώστε $q_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Εφόσον η f συνεχής έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(\sqrt{2}) \quad (4)$$

Επίσης από υπόθεση εφόσον $q_n \in \mathbb{Q}$ έχουμε ότι $f(q_n) = q_n^4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Οπότε εφόσον $q_n \rightarrow \sqrt{2} \Rightarrow f(q_n) = q_n^4 \rightarrow (\sqrt{2})^4 = 4 \quad (5)$

Από (4), (5) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι $f(\sqrt{2}) = 4$.

Άσκηση 23.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(\tau) = \tau^2 \text{ για κάθε } \tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Είναι σωστό ότι $f(\frac{5}{7}) = 1$?

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Όχι. Όπως στο ??ο λυμένο, χρησιμοποιώντας ακολουθίες αρρήτων $\tau_n \rightarrow x$, δείχνουμε ότι $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f(\frac{5}{7}) = \frac{25}{49} \neq 1$.

Άσκηση 24.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

Δ.ο. $f = g$ όταν

1) $A = \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

2) $A = \left\{ \frac{m}{n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

3) $A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Λύση.

1) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. $f(x) = g(x)$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $m_n = [nx]$. Έχουμε ότι

$$m_n \leq nx < m_n + 1 \Rightarrow$$

$$nx - 1 < m_n \leq nx \Rightarrow$$

$$x - \frac{1}{n} < \frac{m_n}{n} \leq x \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Εφόσον $x - \frac{1}{n} \xrightarrow{n} x$, από ισοσυγκλίνουσες έχουμε ότι

$$\frac{m_n}{n} \xrightarrow{n} x$$

Οπότε θέτοντας $q_n = \frac{m_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι (q_n) ακολουθία ρητών με $q_n \xrightarrow{n} x$.

Τώρα επειδή f, g συνεχείς στο x , από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x) \text{ και } g(q_n) \rightarrow g(x)$$

Επειδή από υπόθεση $f(q_n) = g(q_n) \forall n \in \mathbb{N}$ και το όριο ακολουθίας είναι μοναδικό, έπεται ότι

$$f(x) = g(x)$$

2) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. $f(x) = g(x)$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $m_n = [n^2x]$. Έχουμε ότι

$$m_n \leq n^2x < m_n + 1 \Rightarrow$$

$$n^2x - 1 < m_n \leq n^2x \Rightarrow$$

$$x - \frac{1}{n^2} < \frac{m_n}{n^2} \leq x \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Επειδή $x - \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} x$, από ισοσυγκλίνουσες έχουμε ότι

$$\frac{m_n}{n^2} \xrightarrow{n} x$$

Οπότε θέτοντας $a_n = \frac{m_n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι (a_n) ακολουθία στοιχείων του A και $a_n \rightarrow x$.

Τώρα αφού οι f, g συνεχείς στο x , από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(a_n) \rightarrow f(x) \text{ και } g(a_n) \rightarrow g(x)$$

Από υπόθεση $f(a_n) = g(a_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα αφού το όριο ακολουθίας είναι μοναδικό, έπεται ότι

$$f(x) = g(x)$$

3) Όμοια με (2) αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Θέσε $m_n = [2^n x]$. τότε $x - \frac{1}{2^n} < \frac{m_n}{2^n} \leq x$.

Άσκηση 25.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) = x \text{ ημ} \left(\frac{1}{x} \right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ με $x \neq 0$.

α) Ποια η τιμή της f στο 0?

β) Ποιο το $f(x)$ όπου $x \in \mathbb{R}$?

Λύση.

α) Έστω (q_n) ακολουθία ρητών με $q_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ και $q_n \rightarrow 0$ (π.χ. $q_n = \frac{1}{n}$). Εφόσον f συνεχής, έχουμε από Α.Μ. ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(0) \quad (1)$$

Από υπόθεση επειδή $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \neq 0$, τότε

$$f(q_n) = q_n \text{ ημ} \left(\frac{1}{q_n} \right) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Τώρα εφόσον $q_n \rightarrow 0$, η ακολουθία $(\text{ημ}(\frac{1}{q_n}))$ φραγμένη, έπεται ότι

$$f(q_n) \rightarrow 0 \quad (2)$$

Από (1), (2) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έχουμε ότι $f(0) = 0$.

β) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0 \neq 0$. Από την πυκνότητα των ρητών, υπάρχει (q_n) ακολουθία ρητών με $q_n \neq 0 \forall n$ ώστε $q_n \rightarrow x_0$ (γιατί?).

Επειδή $q_n \rightarrow x_0$ και η $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \text{ημ}(\frac{1}{x})$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών), από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$g(q_n) = \text{ημ} \left(\frac{1}{q_n} \right) \rightarrow \text{ημ} \left(\frac{1}{x_0} \right)$$

Οπότε

$$f(x_0) \stackrel[\substack{\text{Από Α.Μ. αφού} \\ f \text{ συνεχής, } q_n \rightarrow x_0}]{\text{}} \lim f(q_n) = \lim \left(q_n \text{ ημ} \left(\frac{1}{q_n} \right) \right) \stackrel[\substack{q_n \rightarrow x_0 \\ \text{ημ}(\frac{1}{q_n}) \rightarrow \text{ημ}(\frac{1}{x_0})}]{\text{}} x_0 \text{ ημ} \left(\frac{1}{x_0} \right)$$

Οπότε $f(x) = x \text{ ημ}(\frac{1}{x})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$, ενώ από (α) $f(0) = 0$.

β' τρόπος

Έστω η $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x \text{ ημ} \left(\frac{1}{x} \right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Εύκολα η h συνεχής.

Από υπόθεση $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ (για $x = 0$ από το (α)).

Οπότε εφόσον και η f συνεχής, όπως στο ??ο λυμένο (β) έπεται ότι $f = h$.

Άσκηση 26.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) = x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ποιο το $f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$?

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Όπως στο ??ο λυμένο, με ακολουθίες αρρήτων αντί ρητών. Βρίσκουμε $f(0) = 0$ και $f(x) = x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ για $x \neq 0$.

Άσκηση 27.

Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{Q} \text{ με } x \neq 0 ?$$

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Όχι. Έστω ότι υπάρχει. Οι f και $g(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ και συμπίπτουν στους μη μηδενικούς ρητούς· όπως στο ??ο λυμένο (β) έπεται $f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x \neq 0$. Τότε $f\left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2n\pi+3\pi/2}\right) = -1$, ενώ και οι δύο ακολουθίες σημείων τείνουν στο 0. Άτοπο από την Α.Μ., εφόσον η f συνεχής στο 0.

Άσκηση 28.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Αποδείξτε ότι

α) Εάν $f(q) \leq 0$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ τότε $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Εάν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f(q) \leq g(q)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, τότε $f(x) \leq g(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

γ) Εάν $f(q) \leq q^3$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ τότε $f(x) \leq x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Εάν $f(q) \leq \sin q$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, τότε $f(\pi) \leq -1$

Λύση.

α) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ με $q_n \rightarrow x$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Από Α.Μ. έχουμε ότι } f(q_n) \rightarrow f(x) \\ \text{Από υπόθεση έχουμε } f(q_n) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \xRightarrow{(*)} f(x) \leq 0$$

(*) Βλέπε παρακάτω τις Υπενθυμίσεις, 1 ii).

β), γ), δ) Αφήνονται ως άσκηση.

Υπόδ. β) Εφάρμοσε το (α) στην $f - g$. γ) Το (β) με $g(x) = x^3$. δ) Από το (β) με $g = \sin$ έχουμε $f(x) \leq \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(\pi) \leq \sin \pi = -1$.

Άσκηση 29.

Έστω $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ h(x) & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

α) Αν $g(x_0) = h(x_0)$ τότε η f συνεχής στο x_0

β) Αν $g(x_0) \neq h(x_0)$ τότε η f ασυνεχής στο x_0

Λύση.

α) Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Εφόσον οι g, h συνεχείς στο x_0 , υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τ.ω.

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \text{ με } |x - x_0| < \delta_1 \quad (1)$$

και

$$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \text{ με } |x - x_0| < \delta_2 \quad (2)$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Επειδή $\delta \leq \delta_1$ και $\delta \leq \delta_2$ έχουμε ότι $|x - x_0| < \delta_1$, $|x - x_0| < \delta_2$ και συνεπώς από (1), (2) έπεται ότι

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon \quad (3)$$

Επίσης $f(x_0) = g(x_0)$ (αν $x_0 \in \mathbb{Q}$) ή $f(x_0) = h(x_0)$ (αν $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) και εφόσον $g(x_0) = h(x_0)$, έχουμε ότι $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$.

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \begin{cases} \stackrel{x \in \mathbb{Q}}{=} |g(x) - g(x_0)| \stackrel{(3)}{<} \varepsilon \\ \stackrel{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}{=} |h(x) - h(x_0)| \stackrel{(3)}{<} \varepsilon \end{cases}$$

Συνεπώς για το τυχόν $\varepsilon > 0$, δείξαμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta$$

β) Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο x_0 .

Από πυκνότητα ρητών και αρρήτων, υπάρχουν (q_n) ακολουθία ρητών και (τ_n) ακολουθία αρρήτων ώστε $q_n \rightarrow x_0$ και $\tau_n \rightarrow x_0$.

Εφόσον η f συνεχής στο x_0 , από την Α.Μ. έπεται ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \rightarrow f(x_0)$$

Επίσης εφόσον g, h συνεχείς στο x_0 , από Α.Μ. έχουμε ότι

$$g(q_n) \rightarrow g(x_0) \quad \text{και} \quad h(\tau_n) \rightarrow h(x_0)$$

Εφόσον $q_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(q_n) = g(q_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς αφού $f(q_n) \rightarrow f(x_0)$ και $g(q_n) \rightarrow g(x_0)$, από την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι

$$f(x_0) = g(x_0)$$

Ομοίως $f(x_0) = h(x_0)$.

Άρα $g(x_0) = f(x_0) = h(x_0)$. Άτοπο αφού $g(x_0) \neq h(x_0)$.

Παρατήρηση

Κοίτα ξανά τις ασκήσεις ??-??. Είναι ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω: στην ?? είναι $g(x) = x$, $h(x) = 0$, στην ?? είναι $g(x) = 1 - x$, $h(x) = x$ και στην ?? είναι $g(x) = x$, $h(x) = x^2$.

Άσκηση 30.

Να εξετασθεί ως προς την συνέχεια η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όταν

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & x \in \mathbb{Q} \\ \sigma\upsilon\nu x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 \sigma\upsilon\nu(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Λύση.

Μέθοδος. Σε όλες τις περιπτώσεις η f είναι της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Q} \\ h(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

με g, h συνεχείς. Βρίσκουμε πρώτα (στο πρόχειρο) τα σημεία x_0 όπου $g(x_0) = h(x_0)$. Σε αυτά δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής (με τον ορισμό), ενώ στα υπόλοιπα δείχνουμε ότι η f είναι ασυνεχής (με ακολουθίες και την αρχή μεταφοράς). Ουσιαστικά επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του ??ου λυμένου στη συγκεκριμένη περίπτωση.

$\alpha)$ (Στο πρόχειρο: $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.) Έστω $A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Θα δ.ο.

i) η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$

ii) η f ασυνεχής σε κάθε $x_0 \notin A$

i) Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $x_0 = k\pi$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$f(k\pi) = 0$$

(για $k \neq 0$ αφού $k\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ενώ για $k = 0$ αφού $0 \in \mathbb{Q}$ και $\eta\mu 0 = 0$).

Έστω $\varepsilon > 0$, τυχόν θετικός αριθμός. Εφόσον η $\eta\mu$ είναι συνεχής στο $k\pi$ και $\eta\mu(k\pi) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|\eta\mu x| = |\eta\mu x - \eta\mu(k\pi)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - k\pi| < \delta \quad (1)$$

(Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε $\delta = \varepsilon$, αφού $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y|$.)

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - k\pi| < \delta$. Τότε

$$|f(x) - f(k\pi)| = |f(x)| = \begin{cases} |\eta\mu x| \stackrel{(1)}{<} \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(k\pi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - k\pi| < \delta$, δηλ. η f συνεχής στο $k\pi$.

ii) Έστω $x_0 \notin A$, δηλ. $\eta\mu x_0 \neq 0$. Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο x_0 . Από πυκνότητα ρητών και αρρήτων υπάρχουν $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ και $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $q_n \rightarrow x_0$ και $\tau_n \rightarrow x_0$. Από την αρχή μεταφοράς

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \rightarrow f(x_0)$$

Όμως

• $f(q_n) = \eta\mu q_n \rightarrow \eta\mu x_0$, αφού η $\eta\mu$ συνεχής στο x_0 (αρχή μεταφοράς για την $\eta\mu$)

• $f(\tau_n) = 0 \rightarrow 0$.

Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έχουμε $\eta\mu x_0 = f(x_0) = 0$. Άτοπο αφού $\eta\mu x_0 \neq 0$.

Συνεπώς η f είναι συνεχής ακριβώς στα σημεία $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

β) (Στο πρόχειρο: $\eta\mu x = \sin x \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, αφού όταν $\sin x = 0$ είναι $\eta\mu x = \pm 1 \neq \sin x$.) Έστω $B = \{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

i) Έστω $x_0 \in B$. Τότε $\eta\mu x_0 = \sin x_0$ κι άρα, είτε $x_0 \in \mathbb{Q}$ είτε όχι,

$$f(x_0) = \eta\mu x_0 = \sin x_0$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$. Τότε, αφού $|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y|$ και $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \begin{cases} |\eta\mu x - \eta\mu x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

ii) Έστω $x_0 \notin B$, δηλ. $\eta\mu x_0 \neq \sin x_0$, και έστω προς άτοπο ότι η f συνεχής στο x_0 . Παίρνουμε $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $q_n \rightarrow x_0$, $\tau_n \rightarrow x_0$. Τότε

$$f(q_n) = \eta\mu q_n \rightarrow \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad f(\tau_n) = \sin \tau_n \rightarrow \sin x_0$$

ενώ από την αρχή μεταφοράς $f(q_n) \rightarrow f(x_0)$ και $f(\tau_n) \rightarrow f(x_0)$. Άρα $\eta\mu x_0 = f(x_0) = \sin x_0$. Άτοπο.

Συνεπώς η f είναι συνεχής ακριβώς στα σημεία $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

γ) Εδώ $g(x) = 0$ και $h(x) = x^2 \sin x$. (Στο πρόχειρο: $x^2 \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.) Έστω $\Gamma = \{0\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

i) Έστω $x_0 \in \Gamma$. Τότε $h(x_0) = 0$ κι άρα $f(x_0) = 0$ (είτε $x_0 \in \mathbb{Q}$ είτε όχι). Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η h είναι συνεχής στο x_0 και $h(x_0) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|h(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta$$

Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \begin{cases} 0 < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ |x^2 \sin x| = |h(x)| < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

ii) Έστω $x_0 \notin \Gamma$, δηλ. $x_0^2 \sin x_0 \neq 0$, και έστω προς άτοπο ότι η f συνεχής στο x_0 .

Με $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $q_n \rightarrow x_0$, $\tau_n \rightarrow x_0$ έχουμε

$$f(q_n) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad f(\tau_n) = \tau_n^2 \sin \tau_n \rightarrow x_0^2 \sin x_0$$

ενώ από την αρχή μεταφοράς και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο $f(x_0)$. Άρα $x_0^2 \sin x_0 = 0$. Άτοπο.

Συνεπώς η f είναι συνεχής ακριβώς στα σημεία του Γ .

Άσκηση 31.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \eta\mu x) & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$.

Λύση.

(Στο πρόχειρο: αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ έχουμε $1 \leq 2 + \eta\mu x \leq 3$, κι άρα $x^3(2 + \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.)

i) Η f συνεχής στο 0. Είναι $f(0) = 0^3(2 + \eta\mu 0) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$, τυχόν θετικός αριθμός. Θέτουμε

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{3}}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$.

- Αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε $|f(x) - f(0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.
- Αν $x \in \mathbb{Q}$, τότε

$$|f(x) - f(0)| = |x|^3 |2 + \eta\mu x| \leq 3|x|^3 < 3\delta^3 = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο 0.

ii) Η f ασυνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$. Έστω $x_0 \neq 0$ και έστω προς άτοπο ότι η f συνεχής στο x_0 .

Από πυκνότητα ρητών και αρρήτων υπάρχουν $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ και $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $q_n \rightarrow x_0$ και $\tau_n \rightarrow x_0$. Από την αρχή μεταφοράς

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{και} \quad f(\tau_n) \rightarrow f(x_0)$$

Η $g(x) = x^3(2 + \eta\mu x)$ είναι συνεχής (γινόμενο συνεχών) κι άρα

$$f(q_n) = g(q_n) \rightarrow g(x_0) = x_0^3(2 + \eta\mu x_0)$$

Επίσης $f(\tau_n) = 0 \rightarrow 0$. Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας

$$x_0^3(2 + \eta\mu x_0) = f(x_0) = 0$$

και αφού $2 + \eta\mu x_0 \geq 1 > 0$, έπεται $x_0 = 0$. Άτοπο.

Άσκηση 32.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

και $A = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Αποδείξτε ότι

- i) η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$
- ii) η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \notin A$.

Λύση.

(Στο πρόχειρο: $x^3 \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\eta \mu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.)

Έστω $g(x) = x^3 \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής (γινόμενο συνεχών).

i) Έστω $x_0 = k\pi \in A$. Τότε $f(x_0) = 0$ (για $k \neq 0$ αφού $k\pi \notin \mathbb{Q}$, ενώ για $k = 0$ αφού $g(0) = 0$). Επίσης $g(x_0) = 0$.

α' τρόπος

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0 και $g(x_0) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|g(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x - x_0| < \delta$$

Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \begin{cases} |g(x)| < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 < \varepsilon & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

β' τρόπος (βρίσκοντας το δ “ρητά”)

Όπως πριν, αρκεί για $\varepsilon > 0$ να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $|x^3 \eta \mu x| < \varepsilon$ για κάθε x με $|x - x_0| < \delta$ (για $x \notin \mathbb{Q}$ είναι $|f(x) - f(x_0)| = 0$).

- Αν $x_0 = 0$: θέτουμε $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Τότε για $|x| < \delta$ είναι

$$|x^3 \eta \mu x| \leq |x|^3 < \delta^3 = \varepsilon$$

- Αν $x_0 = k\pi \neq 0$: αφού $\eta \mu x_0 = 0$,

$$\begin{aligned} |x^3 \eta \mu x| &= |x^3 \eta \mu x - x_0^3 \eta \mu x + x_0^3 \eta \mu x - x_0^3 \eta \mu x_0| \\ &\leq |x^3 - x_0^3| |\eta \mu x| + |x_0|^3 |\eta \mu x - \eta \mu x_0| \\ &\leq |x - x_0| |x^2 + xx_0 + x_0^2| + |x_0|^3 |x - x_0| \\ &\leq (|x|^2 + |x| |x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^3) |x - x_0| \end{aligned}$$

Εάν $|x - x_0| < 1$ τότε $|x| \leq |x - x_0| + |x_0| < 1 + |x_0| =: \lambda$. Αφού $\lambda \geq 1$ έχουμε $|x_0|^2 \leq \lambda^2 \leq \lambda^3$ και $|x_0|^3 \leq \lambda^3$, οπότε

$$|x^3 \eta \mu x| \leq M |x - x_0|, \quad \text{όπου } M = \lambda^2 + \lambda |x_0| + 2\lambda^3$$

Θέτουμε

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{M} \right\}$$

Τότε για $|x - x_0| < \delta$ είναι $|x - x_0| < 1$ και $|x^3 \eta \mu x| \leq M|x - x_0| < M\delta \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

Παρατήρηση. Το “κόλπο” να πάρουμε $\delta \leq 1$, ώστε να φράξουμε το $|x|$ από $1 + |x_0|$, το έχουμε ήδη δει στο ??ο λυμένο (συνέχεια της x^2). Ο α’ τρόπος όμως το αποφεύγει εντελώς: αρκεί η συνέχεια της g .

ii) Έστω $x_0 \notin A$ (δηλ. $x_0 \neq 0$ και $\eta \mu x_0 \neq 0$, οπότε $g(x_0) \neq 0$) και έστω προς άτοπο ότι η f συνεχής στο x_0 . Όπως στο ??ο λυμένο, με $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $q_n \rightarrow x_0$, $\tau_n \rightarrow x_0$ έχουμε

$$f(q_n) = g(q_n) \rightarrow g(x_0) \quad \text{και} \quad f(\tau_n) = 0 \rightarrow 0$$

ενώ από την αρχή μεταφοράς και οι δύο συγκλίνουν στο $f(x_0)$. Άρα $g(x_0) = 0$. Άτοπο.

Άσκηση 33.

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \in \mathbb{Q} \\ \sigma\upsilon\nu x - e^x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Δ.ο. η f συνεχής στο 0 και ασυνεχής στο 1.

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Εφάρμοσε το ??ο λυμένο με $g(x) = \eta\mu x$, $h(x) = \sigma\upsilon\nu x - e^x$. Είναι $g(0) = 0 = h(0)$, ενώ $g(1) = \eta\mu 1 > 0 > \sigma\upsilon\nu 1 - e = h(1)$.

Υπενθυμίσεις

1) Έστω $(a_n), (b_n)$ δύο ακολουθίες με $a_n \rightarrow a$ και $b_n \rightarrow b$.

i) Εάν $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a \leq M$

(4ο λυμένο κεφ. 3)

ii) Ειδικότερα εάν $a_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $a \leq 0$

iii) Εάν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $a \leq b$

[Πράγματι εάν $\gamma_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$ τότε αφού $a_n \leq b_n$, έχουμε $\gamma_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma_n \rightarrow a - b$. Οπότε από (ii) έχουμε $a \leq b$.]

iv) Προσοχή!!! Εάν $a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δεν ισχύει πάντα ότι $a < b$. Πάρε για παράδειγμα $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Είναι σαφές ότι $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim a_n = 1 = \lim b_n$.

2) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

i) Υπάρχει $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε $q_n < x \forall n \in \mathbb{N}$ και $q_n \rightarrow x$

ii) Υπάρχει $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε $q_n > x \forall n \in \mathbb{N}$ και $q_n \rightarrow x$

iii) Εάν $b \in \mathbb{R}$ με $x < b$, υπάρχει $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε

$$x < q_n < b \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } q_n \rightarrow x$$

iv) Εάν $b \in \mathbb{R}$ με $b < x$, υπάρχει $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε

$$b < q_n < x \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } q_n \rightarrow x$$

Απόδειξη.

i) Από την πυκνότητα των ρητών έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $A_n = (x - \frac{1}{n}, x) \cap \mathbb{Q}$ είναι μη κενό. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ένα

$$q_n \in (x - \frac{1}{n}, x) \cap \mathbb{Q}$$

Για την ακολουθία (q_n) έχουμε ότι $q_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x - \frac{1}{n} < q_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από κριτήριο ισοσυγκλινοσών, έπεται ότι $q_n \rightarrow x$.

ii) Όπως στο (i) με $A_n = (x, x + \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$.

iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εάν $\varepsilon_n = \min\{x + \frac{1}{n}, b\}$ τότε εφόσον $x < \varepsilon_n$, υπάρχει ρητός ανάμεσα στους x, ε_n . Με άλλα λόγια το $A_n = (x, \varepsilon_n) \cap \mathbb{Q}$ μη κενό.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε ένα $q_n \in A_n$.

Τότε η (q_n) ακολουθία ρητών και

$$x < q_n < x + \frac{1}{n}, \quad q_n < b \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Άρα $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$, $q_n \rightarrow x$ και $q_n < b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

iv) Ανάλογα με το (iii) (Πώς?)

Άσκηση 34.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(p) \leq f(q)$$

για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$.

α) Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα

β) Εάν $f(p) < f(q)$ για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$, είναι η f γνησίως αύξουσα?

Λύση.

α) α' τρόπος

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$.



Έστω $(p_n), (q_n)$ ακολουθίες ρητών (Υπενθυμίσεις 2 (i), (ii)) ώστε

i) $p_n < x, y < q_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

και

ii) $p_n \rightarrow x, q_n \rightarrow y$

Εφόσον f συνεχής, από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(p_n) \rightarrow f(x) \quad \text{και} \quad f(q_n) \rightarrow f(y) \quad (1)$$

Επίσης εφόσον $p_n < x < y < q_n \Rightarrow p_n < q_n \xrightarrow{\text{υπόθεση}}$

$$f(p_n) \leq f(q_n), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

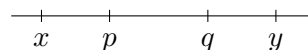
Από (1), (2) (Υπενθυμίσεις 1 (iii)) έχουμε ότι $f(x) \leq f(y)$.

β) Ναι είναι η απάντηση, ας το αποδείξουμε.

α' τρόπος

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Από πυκνότητα ρητών

υπάρχει $p \in \mathbb{Q}$ με $x < p < y$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $p < q <$



y .

Έστω $(p_n), (q_n)$ ακολουθίες ρητών (Υπενθυμίσεις 2 (iii), (iv)) ώστε

i) $x < p_n < p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, p_n \rightarrow x$

ii) $q < q_n < y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, q_n \rightarrow y$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον $p_n < p, p_n, p \in \mathbb{Q}$, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$f(p_n) < f(p) \quad (1)$$

Επίσης εφόσον $p_n \rightarrow x, f$ συνεχής, από την Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(p_n) \rightarrow f(x) \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε ότι

$$f(x) \leq f(p) \quad (3)$$

Ανάλογα δείχνουμε ότι

$$f(q) \leq f(y) \quad (4)$$

Τώρα επειδή $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$, από την υπόθεση έχουμε ότι $f(p) < f(q)$ κι άρα από τις (3), (4) έπεται ότι

$$f(x) \leq f(p) < f(q) \leq f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$$

β' τρόπος χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α)

Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι η f είναι αύξουσα.

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχουν $p, q \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$x < p < q < y \quad (\text{γιατί?})$$

Εφόσον η f αύξουσα έχουμε ότι

$$f(x) \leq f(p) \quad \text{και} \quad f(q) \leq f(y) \quad (5)$$

Επίσης από την υπόθεση, εφόσον $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$, έπεται ότι $f(p) < f(q)$. Οπότε από την (5) έχουμε ότι

$$f(x) < f(y)$$

Άσκηση 35.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

α) Αν $f(x + q) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι η f σταθερή

β) Αν $f(x + q) = f(x)$ για κάθε $x, q \in \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι η f σταθερή

Λύση.

α) Θα αποδείξουμε ότι

$$f(x) = f(0)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και θα έχουμε ότι η f σταθερή.

Παρατηρούμε ότι εάν $q \in \mathbb{Q}$ τότε από την υπόθεση για $x = 0$ έχουμε ότι $f(q) = f(0)$.

Οπότε

$$f(q) = f(0) \quad \text{για κάθε } q \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Έστω (q_n) ακολουθία ρητών ώστε $q_n \rightarrow x$.

Εφόσον f συνεχής, από Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x) \quad (2)$$

Επίσης από (1) έχουμε $f(q_n) = f(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$f(q_n) \rightarrow f(0) \quad (3)$$

Από (2), (3) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι $f(x) = f(0)$.

β) Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Για $x = 0$ η υπόθεση δίνει $f(q) = f(0)$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Μετά όπως στο (α).

Άσκηση 36.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x + a) = f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $a \in A$ όπου $A = \left\{ \frac{m}{n^3} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Για $x = 0$ έχουμε $f(a) = f(0)$ για κάθε $a \in A$. Το A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ (θέσε $m_n = [n^3 x]$, όπως στην Υπενθύμιση από τα λυμένα του κεφ. 3, (2)). Μετά όπως στο ??ο λυμένο (α).

Άσκηση 37.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δ.ο. η f σταθερή.

Λύση.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$\text{i) } f(x) = f\left(x + \frac{m}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$$

[Πράγματι έχουμε ότι εάν $x_0 \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ τότε από υπόθεση

$$\left. \begin{array}{ll} \text{για } x = x_0 & \rightsquigarrow f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \\ \text{για } x = x_0 + \frac{1}{n} & \rightsquigarrow f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f\left(x_0 + \frac{2}{n}\right) \\ \text{για } x = x_0 + \frac{2}{n} & \rightsquigarrow f\left(x_0 + \frac{2}{n}\right) = f\left(x_0 + \frac{3}{n}\right) \\ \vdots & \\ \text{για } x = x_0 + \frac{m-1}{n} & \rightsquigarrow f\left(x_0 + \frac{m-1}{n}\right) = f\left(x_0 + \frac{m}{n}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = \cdots = f\left(x_0 + \frac{m}{n}\right) \Rightarrow f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{m}{n}\right)]$$

$$\text{ii) } f(x) = f\left(x - \frac{m}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

[Πράγματι εάν $x_0 \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, τότε από το (i) για $x = x_0 - \frac{m}{n}$ έχουμε ότι $f\left(x_0 - \frac{m}{n}\right) = f(x_0)$.]

$$\text{iii) } f(x) = f\left(x + \frac{m}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

[Πράγματι έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις

α) $\underline{m \geq 0}$. Τότε από (i) έχουμε $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{m}{n}\right)$

β) $\underline{m < 0}$. Τότε από (ii) για $k = -m \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$f(x_0) = f\left(x_0 - \frac{k}{n}\right) = f\left(x_0 + \frac{m}{n}\right)$$

γ) $\underline{m = 0}$. Προφανές.]

Οπότε τελικά έχουμε ότι

$$f(x) = f\left(x + \frac{m}{n}\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$f(x) = f(x + q)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

Όπως στο ??ο λυμένο (α) δείχνουμε ότι η f είναι σταθερή.

Άσκηση 38.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η f σταθερή.

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Όπως στο ??ο λυμένο δείξε ότι $f(x) = f\left(x + \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\left\{\frac{m}{\sqrt{n}} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι πυκνό (Υπενθύμιση από τα λυμένα του κεφ. 3, (3)). Μετά όπως στο ??ο λυμένο (α).

Άσκηση 39.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$$

Αν $A \neq \emptyset$, δ.ο. $\sup A, \inf A \in A$.

Λύση.

Κατ' αρχάς πρέπει να αιτιολογήσουμε την ύπαρξη των $\sup A, \inf A$.

Εφόσον $A \subseteq [a, b]$, έχουμε ότι

$$a \leq x \leq b, \quad \forall x \in A$$

Άρα το A φραγμένο με ένα κάτω φράγμα το a και ένα άνω φράγμα το b .

Οπότε εφόσον $A \neq \emptyset$, υπάρχουν τα $\sup A, \inf A$ και μάλιστα

$$a \leq \sup A \leq b, \quad a \leq \inf A \leq b \quad (1)$$

Ας δ.ο. $\sup A \in A$.

Για ευκολία θέτουμε $\delta = \sup A$.

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $(x_n) \subseteq A$ ώστε $x_n \rightarrow \delta$ (*).

Από (1) έχουμε ότι $\delta \in [a, b]$.

Οπότε (x_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A , άρα και του $[a, b]$ (αφού $A \subseteq [a, b]$)

και $x_n \rightarrow \delta$ όπου $\delta \in [a, b]$.

Εφόσον f συνεχής $\Rightarrow f$ συνεχής στο $\delta \xrightarrow[x_n \rightarrow \delta]{\text{A.M.}} f(x_n) \rightarrow f(\delta)$.

Επίσης επειδή $x_n \in A \Rightarrow f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $f(x_n) \rightarrow 0$. Από μοναδικότητα ορίου

$$f(\delta) = 0 \Rightarrow \delta \in A$$

Όμοια δείχνουμε ότι $\inf A \in A$.

(*) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον $\delta - \frac{1}{n} < \delta, \delta = \sup A$, έχουμε ότι το $\delta - \frac{1}{n}$ όχι άνω φράγμα του A . Άρα υπάρχει $x_n \in A$ ώστε

$$\delta - \frac{1}{n} < x_n \leq \delta \quad (2)$$

Εφόσον $\delta - \frac{1}{n} \rightarrow \delta \Rightarrow x_n \rightarrow \delta$.

Πόρισμα – Ίδια άσκηση

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$$

Αν $A \neq \emptyset$ δ.ο. υπάρχουν τα $\max A, \min A$.

Παρατήρηση

Αν το πεδίο της f στην παραπάνω άσκηση δεν είναι κλειστό διάστημα, δεν ισχύει εν γένει το συμπέρασμα.

Για παράδειγμα έστω η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

Τότε $A = (a, b)$ αλλά το

$$\sup A = b \notin A \text{ και } \inf A = a \notin A$$

Άσκηση 40.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$$

Αποδείξτε ότι εάν $A \neq \emptyset$ τότε $\sup A, \inf A \in A$.

Υπόδ.

Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h = f - g$. Η h συνεχής και

$$A = \{x \in [a, b] : h(x) = 0\}$$

Μετά συνεχίζουμε όπως στο ??ο λυμένο.

Παρόμοια και με Θ.Ε.Τ.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $\max f = \max g$. Θέτουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$. Δ.ο. το $A \neq \emptyset$ και ότι $\sup A, \inf A \in A$.

Υπόδ. Κοίτα άσκηση ??.

Άσκηση 41.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(a) = 0$. Θέτουμε

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}, \quad B = \{x \in [a, b] : f|_{[a, x]} = 0\}$$

Αποδείξτε ότι

α) Υπάρχει το $\sup A$ και $\sup A \in A$

β) Υπάρχει το $\sup B$ και $\sup B \in B$

Λύση.

α) Επειδή $f(a) = 0 \Rightarrow a \in A$ κι άρα το $A \neq \emptyset$.

Επίσης εφόσον $A \subseteq [a, b]$ έχουμε ότι το A φραγμένο με ένα κάτω φράγμα το a και ένα άνω φράγμα το b .

Άρα εφόσον το A μη κενό και φραγμένο έχουμε ότι υπάρχουν τα $\inf A, \sup A$.

Θέτουμε $\gamma = \sup A$. Θα δ.ο. $\gamma \in A$.

Κατ' αρχάς εφόσον a κάτω φράγμα του A και b άνω φράγμα του A , έχουμε ότι

$$a \leq \gamma \leq b$$

Επειδή $\gamma = \sup A$, υπάρχει (x_n) ακολουθία στοιχείων του A ώστε $x_n \rightarrow \gamma$ (*).

Εφόσον f συνεχής και $\gamma \in [a, b]$, έχουμε ότι η f συνεχής στο γ και συνεπώς επειδή $x_n \rightarrow \gamma$, από την Α.Μ. έπεται ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(\gamma) \quad (1)$$

Τώρα επειδή $x_n \in A \Rightarrow f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς $f(x_n) \rightarrow 0$ και από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας και (1), έχουμε ότι $f(\gamma) = 0$.

Άρα $\gamma \in A$.

β) Κατ' αρχάς $B \neq \emptyset$ εφόσον $a \in B$. Επίσης $B \subseteq [a, b]$ κι άρα B φραγμένο με ένα κάτω φράγμα το a και ένα άνω φράγμα το b .

Οπότε υπάρχει το $\sup B$. Θέτουμε $\gamma = \sup B$.

Θα δ.ο. $\gamma \in B$, δηλ. ότι $f|_{[a, \gamma]} = 0$ ή με άλλα λόγια, θα δ.ο.

$$f(x) = 0, \quad \text{για κάθε } x \in [a, \gamma]$$

Έστω λοιπόν $x \in [a, \gamma]$. Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) $x < \gamma$

Εφόσον $\gamma = \sup B$, $x < \gamma$, έπεται ότι το x όχι άνω φράγμα του B και συνεπώς υπάρχει $y \in B$ με $x < y$.

Εφόσον $y \in B \Rightarrow f|_{[a, y]} = 0 \xrightarrow{a \leq x < y} f(x) = 0$.

ii) $x = \gamma$

Επειδή $\gamma = \sup B$, υπάρχει $(x_n) \subseteq B$ με $x_n \rightarrow \gamma$.

Επειδή f συνεχής στο γ , από την Α.Μ. έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(\gamma)$ (γιατί $\gamma \in [a, b]$?)
 Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον $x_n \in B \Rightarrow f|_{[a, x_n]} = 0 \Rightarrow f(x_n) = 0$.
 Οπότε $f(x_n) \rightarrow 0$ και επειδή $f(x_n) \rightarrow f(\gamma)$, από την μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έχουμε ότι $f(\gamma) = 0$.

(*) Έστω $A \neq \emptyset$ άνω φραγμένο και $\gamma = \sup A$.

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον το $\gamma - \frac{1}{n} < \gamma$ έχουμε ότι το $\gamma - \frac{1}{n}$ όχι άνω φράγμα του A και συνεπώς υπάρχει $x_n \in A$ με $\gamma - \frac{1}{n} < x_n \leq \gamma$.

Οπότε η (x_n) ακολουθία στοιχείων του A και από κριτήριο ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $x_n \rightarrow \gamma$.

Άσκηση

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και

$$B = \{x \in [a, b] : f|_{[a, x]} = 0\}$$

Εάν το B είναι μη κενό, δ.ο. υπάρχει το $\sup B$ και εξετάστε εάν το $\sup B \in B$.

Υπόδ. Ναι. Εάν $\gamma = \sup B$ και $x \in [a, \gamma)$, υπάρχει $y \in B$ με $x < y$, άρα $f(x) = 0$.

Όπως στο ??ο λυμένο (β), περίπτωση (i).

Άσκηση 42.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο 0 και έστω ότι

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δ.ο. η f είναι σταθερή.

Λύση.

Θα δ.ο. $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ (σταθερό). Παρατηρούμε ότι από (1) εάν $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{ll} \text{για } x = x_0 & \rightsquigarrow f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) \\ \text{για } x = \frac{x_0}{2} & \rightsquigarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^2}\right) \\ \text{για } x = \frac{x_0}{2^2} & \rightsquigarrow f\left(\frac{x_0}{2^2}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^3}\right) \\ \dots & \\ \text{για } x = \frac{x_0}{2^{n-1}} & \rightsquigarrow f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$$

Οπότε

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(x_0) \quad (2)$$

Επίσης επειδή $\frac{x_0}{2^n} \rightarrow 0$, η f συνεχής στο 0, από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \rightarrow f(0) \quad (3)$$

Από τις (2), (3) και δοθέντος ότι το όριο ακολουθίας είναι μοναδικό, έπεται ότι

$$f(x_0) = f(0)$$

Άσκηση 43.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) = f(x^2), \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1] \quad (1)$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση.

Εάν $x_0 \in [0, 1]$ παρατηρούμε ότι από (1)

$$\begin{aligned} \text{για } x = x_0 & \rightsquigarrow f(x_0) = f(x_0^2) \\ \text{για } x = x_0^2 & \rightsquigarrow f(x_0^2) = f(x_0^{2^2}) \\ \text{για } x = x_0^{2^2} & \rightsquigarrow f(x_0^{2^2}) = f(x_0^{2^3}) \\ & \dots \\ \text{για } x = x_0^{2^{n-1}} & \rightsquigarrow f(x_0^{2^{n-1}}) = f(x_0^{2^n}) \quad \text{όπου } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Άρα $f(x_0) = f(x_0^2) = f(x_0^{2^2}) = \dots = f(x_0^{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$, δηλ.

$$f(x_0) = f(x_0^{2^n}) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Τώρα εάν $0 \leq x_0 < 1 \Rightarrow x_0^n \xrightarrow{n} 0 \xrightarrow[\text{κεφ. 3}]{\text{κοίτα 38 λυμένο}} x_0^{2^n} \xrightarrow{n} 0$

$$\xrightarrow[f \text{ συνεχής}]{\text{Α.Μ. αφού}} f(x_0^{2^n}) \rightarrow f(0) \quad (2)$$

Επίσης εφόσον $f(x_0^{2^n}) = f(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$f(x_0^{2^n}) \rightarrow f(x_0) \quad (3)$$

Από (2), (3) και μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι $f(x_0) = f(0)$.

Οπότε εφόσον το x_0 τυχόν στοιχείο του $[0, 1]$, έχουμε ότι

$$f(x) = f(0), \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

Αν δείξουμε ότι και $f(1) = f(0)$, θα έχουμε τελικά ότι $f(x) = f(0)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ κι άρα η f είναι σταθερή.

Παρατηρούμε ότι επειδή $1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ και η f συνεχής, από την Α.Μ., έχουμε ότι

$$f(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow f(1)$$

Επίσης επειδή $1 - \frac{1}{n} \in [0, 1]$, έχουμε $f(1 - \frac{1}{n}) = f(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $f(1 - \frac{1}{n}) \rightarrow f(0)$.

Συνεπώς από την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι $f(1) = f(0)$.

(*) Τυπικά πρέπει με επαγωγή να δ.ο.

$$f(x_0) = f(x_0^{2^n}), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

ως εξής:

Για $n = 1$ από υπόθεση έχουμε ότι $f(x_0) = f(x_0^2)$.

Έστω ότι $f(x_0) = f(x_0^{2^n})$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Τότε από υπόθεση για $x = x_0^{2^n}$, έχουμε ότι

$$f(x_0^{2^n}) = f((x_0^{2^n})^2) = f(x_0^{2^{n+1}})$$

κι άρα $f(x_0^{2^{n+1}}) = f(x_0)$.

β' τρόπος

Έστω $y \in [0, 1]$ και $x = \sqrt{y} \in [0, 1]$. Τότε από υπόθεση

$$f(\sqrt{y}) = f(y)$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$f(y) = f(\sqrt{y}), \quad \text{για κάθε } y \in [0, 1] \quad (4)$$

Έστω $y_0 \in [0, 1]$. Τότε από (4)

$$\text{για } y = y_0 \quad \rightsquigarrow f(y_0) = f(y_0^{1/2})$$

$$\text{για } y = y_0^{1/2} \quad \rightsquigarrow f(y_0^{1/2}) = f((y_0^{1/2})^{1/2}) = f(y_0^{1/2^2})$$

$$\text{για } y = y_0^{1/2^2} \quad \rightsquigarrow f(y_0^{1/2^2}) = f(y_0^{1/2^3})$$

και συνεχίζοντας επαγωγικά έχουμε ότι

$$f(y_0) = f(y_0^{1/2^n}) = f(\sqrt[n]{y_0}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω τώρα y_0 με $0 < y_0 \leq 1$. Τότε εφόσον

$$\sqrt[n]{y_0} \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{y_0} \rightarrow 1$$

Συνεπώς εφόσον η f συνεχής, από την Α.Μ., έχουμε ότι

$$f(\sqrt[n]{y_0}) \rightarrow f(1)$$

Τώρα εφόσον $f(\sqrt[n]{y_0}) = f(y_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $f(\sqrt[n]{y_0}) \rightarrow f(y_0)$.

Άρα από την μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έπεται ότι

$$f(y_0) = f(1)$$

Συνεπώς $f(y) = f(1)$, για κάθε $y \in (0, 1]$.

Αν δείξουμε ότι και $f(0) = f(1)$, θα έχουμε τελικά ότι $f(y) = f(1)$ για κάθε $y \in [0, 1]$ κι άρα η f σταθερή.

Παρατηρούμε ότι επειδή $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, η f συνεχής, από την Α.Μ. έχουμε ότι $f(\frac{1}{n}) \rightarrow f(0)$.

Επίσης επειδή $\frac{1}{n} \in (0, 1] \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = f(1)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Οπότε $f(\frac{1}{n}) \rightarrow f(1)$ και συνεπώς από την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας, έπεται ότι $f(1) = f(0)$.

Άσκηση 44.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$. Υποθέτουμε ότι η f έχει ρίζα στο $[a, b + \frac{1}{n}]$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Δ.ο. η f έχει ρίζα στο $[a, b]$.

Λύση.

Για $n = 1, 2, \dots$ έστω $p_n \in [a, b + \frac{1}{n}]$ ώστε $f(p_n) = 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ ώστε $p_n \in [a, b]$.

Τότε έχουμε το επιθυμητό.

ii) $p_n \notin [a, b]$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$

Τότε έχουμε ότι

$$b < p_n \leq b + \frac{1}{n}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και άρα $p_n \rightarrow b$.

Οπότε εφόσον η f συνεχής από την αρχή μεταφοράς έπεται ότι

$$f(p_n) \rightarrow f(b)$$

και εφόσον $f(p_n) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$, έχουμε ότι $f(b) = 0$.

Άρα το b ρίζα της f .

Άσκηση 45.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

“για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$,
υπάρχει y με $|y| < \varepsilon$ και $f(x) = f(y)$ ”

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση.

Θα δείξουμε ότι $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα θα έχουμε ότι η f είναι σταθερή.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ (σταθερό). Από την υπόθεση έχουμε ότι

“για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει y με $|y| < \varepsilon$ ώστε $f(x) = f(y)$ ”

Άρα εάν $n \geq 1$, για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ έχουμε ότι

υπάρχει y_n με $|y_n| < \frac{1}{n}$ ώστε $f(x) = f(y_n)$

Οπότε υπάρχει (y_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

i) $|y_n| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

ii) $f(x) = f(y_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Από το (i) έπεται ότι $y_n \rightarrow 0$.

Άρα εφόσον η f συνεχής από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι

$$f(y_n) \rightarrow f(0)$$

Από το (ii) είναι σαφές ότι

$$f(y_n) \rightarrow f(x)$$

Άρα από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έπεται ότι $f(x) = f(0)$.

Άσκηση 46.

Σκοπός του παρακάτω προβλήματος είναι να δώσουμε ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και ασυνεχής σε κάθε ρητό.

Προτού δώσουμε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης χρειάζεται να παρατηρήσουμε τα εξής:

1) Κάθε ρητός $q \neq 0$ είναι της μορφής $\frac{m}{n}$ όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ και $(m, n) = 1$. [Πράγματι έστω $q \in \mathbb{Q}$ με $q = \frac{k}{\lambda}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ και $k \neq 0$. Τότε εάν $d = (k, \lambda)$ έχουμε ότι

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{k/d}{\lambda/d} \text{ και } \left(\frac{k}{d}, \frac{\lambda}{d}\right) = 1$$

Άρα για $m = k/d$, $n = \lambda/d$ έχουμε ότι $(m, n) = 1$, $q = \frac{m}{n}$.]

2) Εάν $k \in \mathbb{Z}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ τότε στο $[k, k+1]$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ρητοί με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του n_0 .

[Πράγματι οι ρητοί που βρίσκονται στο $[k, k+1]$ με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του n_0 είναι οι

$$k, k+1, k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{3}, k+\frac{2}{3}, k+\frac{1}{4}, k+\frac{3}{4}, k+\frac{1}{5}, \\ k+\frac{2}{5}, k+\frac{3}{5}, k+\frac{4}{5}, \dots, k+\frac{1}{n_0}, k+\frac{2}{n_0}, \dots, k+\frac{n_0-1}{n_0}]$$

Ας έρθουμε τώρα στο πρόβλημα.

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{εάν } x \in \mathbb{Q} \text{ με } x = \frac{m}{n} \text{ όπου } (m, n) = 1 \\ 1 & \text{εάν } x = 0 \\ 0 & \text{εάν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Τότε

- i) Η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- ii) Η f ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{Q}$

Λύση.

i) Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Έστω $\varepsilon > 0$. Από Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Θέτουμε $k = [x_0]$. Τότε $k \leq x_0 < k+1 \xrightarrow[\text{άρα } x_0 \neq k]{x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$
 $k < x_0 < k+1$

Το πλήθος των ρητών στο $[k, k+1]$ με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του n_0 είναι πεπερασμένο. Έστω ότι αυτοί είναι οι $q_1, q_2, \dots, q_l$. Θέτουμε

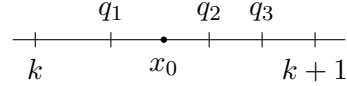
$$\delta = \min\{\text{αποστάσεων του } x_0 \text{ από τους } q_1, \dots, q_l\} \\ = \min\{|x_0 - q_i| : i = 1, \dots, l\}$$

Επειδή $x_0 \neq q_i$ για κάθε $i = 1, \dots, l$ (αφού $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) έχουμε ότι $\delta > 0$.

Επίσης επειδή $x_0, q_1, \dots, q_l \in [k, k+1]$ και οι $k, k+1$ είναι μεταξύ των $q_1, \dots, q_l$, έχουμε ότι

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (k, k+1)$$

Έστω $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.



Τότε εάν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Έστω ότι $x \in \mathbb{Q}$. Από επιλογή δ έχουμε ότι δεν υπάρχει ρητός στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του n_0 .

Άρα $x = \frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$ και $n > n_0$.

Οπότε

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι

$$\text{εάν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

ii) Έστω $x_0 \in \mathbb{Q}$. Θα δ.ο. η f ασυνεχής στο x_0 .

Από τον ορισμό της f έχουμε ότι $f(x_0) \neq 0$.

Έστω ότι η f συνεχής στο x_0 και έστω $(\tau_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $\tau_n \rightarrow x_0$.

Από την αρχή μεταφοράς έχουμε ότι $f(\tau_n) \rightarrow f(x_0)$.

Ατοπο διότι $f(\tau_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(\tau_n) \rightarrow 0 \neq f(x_0)$.

Παρατήρηση

Γενικότερα ισχύει το εξής:

“Έστω $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $a_n \neq a_m$ για $n \neq m$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{εάν } x = a_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε

i) Η f συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

ii) Η f ασυνεχής σε κάθε $x \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ” (γιατί?)

Άσκηση 47.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δ.ο.

$$f \text{ συνεχής στο } a \Leftrightarrow \inf\{f(x) : x \in (a, b]\} = f(a)$$

Λύση.

($\Rightarrow$) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι το $f(a)$ είναι κάτω φράγμα του $A = \{f(x) : x \in (a, b]\}$.

[Πράγματι εφόσον f αύξουσα έχουμε ότι εάν $x > a$ τότε $f(a) \leq f(x)$.]

Οπότε για να δ.ο. $f(a) = \inf A$ αρκεί να δ.ο. το

“για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in A$ ώστε $y < f(a) + \varepsilon$ ” (γιατί?)

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε εάν $x \in [a, b] \cap (a - \delta, a + \delta)$ τότε

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

Άρα εάν $x \in (a, b] \cap (a - \delta, a + \delta)$ έχουμε ότι

$$f(x) \in A \text{ και } f(x) < f(a) + \varepsilon$$

Οπότε για $y = f(x) \in A$ έχουμε ότι $y < f(a) + \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Ας δείξουμε ότι η f συνεχής στο a .

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f(a) = \inf A$ υπάρχει $y_1 \in A$ ώστε

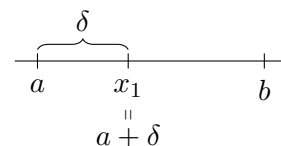
$$y_1 < f(a) + \varepsilon \quad (1)$$

Εφόσον $y_1 \in A$ υπάρχει $x_1 \in (a, b]$ ώστε $y_1 = f(x_1)$.

Άρα από (1) έχουμε ότι

$$f(x_1) < f(a) + \varepsilon \quad (2)$$

Θέτουμε $\delta = x_1 - a > 0$ (αφού $x_1 > a$)



Παρατηρούμε ότι

$$\text{εάν } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap [a, b] = [a, a + \delta) = [a, x_1)$$

έπεται ότι επειδή η f αύξουσα

$$\begin{aligned} f(a) &\leq f(x) \leq f(x_1) \xrightarrow{(2)} \\ f(a) &\leq f(x) < f(a) + \varepsilon \xrightarrow{f(a) - \varepsilon < f(a)} \\ f(a) - \varepsilon &< f(x) < f(a) + \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$, δείξαμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε εάν $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο a .

Παρατήρηση

Ανάλογα μπορούμε να δ.ο.

$$“f \text{ συνεχής στο } b \Leftrightarrow \sup\{f(x) : x \in [a, b)\} = f(b)”$$

Άσκηση 48.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $a < b$, μια συνάρτηση, $x_0 \in (a, b)$ ώστε οι $g = f|_{[a, x_0]}$, $h = f|_{[x_0, b]}$ είναι συνεχείς στο x_0 . Δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Λύση.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $g = f|_{[a, x_0]}$ είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

$$\text{εάν } x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap [a, x_0] \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα έχουμε ότι

$$\text{εάν } x \in (x_0 - \delta_1, x_0] \cap [a, x_0] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

Ανάλογα εφόσον η $h = f|_{[x_0, b]}$ είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε

$$\text{εάν } x \in [x_0, x_0 + \delta_2) \cap [x_0, b] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (2)$$

Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και έστω $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

Τότε εάν $x \leq x_0$ έχουμε ότι

$$x \in (x_0 - \delta, x_0] \cap [a, x_0] \xrightarrow[\text{αφού } \delta \leq \delta_1]{\text{από (1)}} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ανάλογα εάν $x \geq x_0$ από την (2) έπεται ότι

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα σε κάθε περίπτωση εάν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ έχουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 49.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν

$$\sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\} = \inf\{f(x) : x \in (x_0, b]\} = f(x_0)$$

Λύση.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η f συνεχής στο x_0 . Τότε η $g = f|_{[a, x_0]}$ είναι αύξουσα (εφόσον η f είναι) και συνεχής στο x_0 .

Άρα από το πρόβλημα ?? (Παρατήρηση) έχουμε ότι

$$\sup\{g(x) : x \in [a, x_0)\} = g(x_0) \xrightarrow{g=f|_{[a, x_0]}} \sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\} = f(x_0)$$

Ανάλογα έχουμε ότι

$$\inf\{f(x) : x \in (x_0, b]\} = f(x_0)$$

παίρνοντας την $h = f|_{(x_0, b]}$.

($\Leftarrow$) Έστω $g = f|_{[a, x_0]}$, $h = f|_{(x_0, b]}$.

Οι g, h είναι αύξουσες (εφόσον η f είναι). Από υπόθεση επίσης έχουμε ότι

$$\sup\{g(x) : x \in [a, x_0)\} = g(x_0)$$

και

$$\inf\{h(x) : x \in (x_0, b]\} = h(x_0)$$

Άρα από το πρόβλημα ?? (και την Παρατήρησή του) έπεται ότι οι g, h είναι συνεχείς στο x_0 .

Από το ??ο λυμένο έχουμε ότι η f συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 50.

i) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x \in [0, 1]$ ώστε

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

(και μάλιστα $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, ώστε το $x + \frac{1}{n}$ να ανήκει στο $[0, 1]$).

ii) Έστω $a \in (0, 1)$ με $a \neq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1)$ τέτοια ώστε

$$f(x) \neq f(x + a)$$

για κάθε $x \in [0, 1 - a]$.

Λύση.

i) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την $g : [0, 1 - \frac{1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από την σχέση

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$$

Έστω ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Τότε, επειδή η g είναι συνεχής σε διάστημα, από την 6.5.8 A) είτε $g > 0$ είτε $g < 0$.

Έστω ότι $g > 0$. Τότε έχουμε

$$g(0) > 0 \Rightarrow f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{2}{n}\right)$$

.....

$$g\left(\frac{n-2}{n}\right) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{n-2}{n}\right) > f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{n-1}{n}\right) > f(1)$$

Άρα

$$f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right) > \dots > f(1)$$

Άτοπο εφόσον $f(0) = f(1)$.

Ανάλογα καταλήγουμε σ' άτοπο εάν υποθέσουμε ότι $g < 0$. Οπότε υπάρχει $x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$$

ii) Έστω $a \in (0, 1)$ με $a \neq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, δηλ.

$$na < 1 < (n+1)a \quad \text{κι άρα} \quad 0 < 1 - na < a$$

Ορίζουμε πρώτα την $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε το γράφημά της να είναι η πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία

$$(0, 0), \quad (1 - na, -na), \quad (a, a)$$

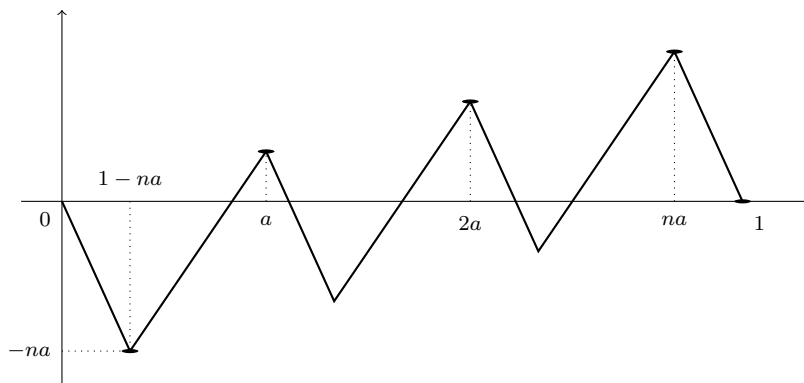
δηλ. στο $[0, 1 - na]$ το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0)$ στο $(1 - na, -na)$ και στο $[1 - na, a]$ το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1 - na, -na)$ στο (a, a) . Η φ είναι συνεχής με $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1 - na) = -na$ και $\varphi(a) = a > 0$.

Ορίζουμε $f : [0, (n + 1)a] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής

$$f(x) = \varphi(x - ka) + ka, \quad \text{εάν } x \in [ka, (k + 1)a], \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Η f είναι καλά ορισμένη: στο κοινό άκρο $x = ka$ δύο διαδοχικών διαστημάτων οι δύο τύποι δίνουν $\varphi(a) + (k - 1)a = ka$ και $\varphi(0) + ka = ka$. Σε κάθε $[ka, (k + 1)a]$ η f είναι συνεχής και οι τύποι συμφωνούν στα άκρα, οπότε η f είναι συνεχής.

Δηλαδή η f προκύπτει μεταφέροντας το γράφημα της φ κατά a δεξιά και κατά a πάνω, ξανά και ξανά.



(το σχήμα για $n = 3$, $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$)

Παρατηρούμε ότι:

- $1 \in [na, (n + 1)a]$, οπότε $f(1) = \varphi(1 - na) + na = -na + na = 0 = f(0)$.
- Εάν $x \in [ka, (k + 1)a]$ με $k \leq n - 1$, τότε $x + a \in [(k + 1)a, (k + 2)a]$ και

$$f(x + a) = \varphi(x - ka) + (k + 1)a = f(x) + a$$

Δηλ. $f(x + a) = f(x) + a \neq f(x)$ για κάθε $x \in [0, na]$.

Επειδή $1 < (n + 1)a$, έχουμε $1 - a < na$, δηλ. $[0, 1 - a] \subseteq [0, na]$. Άρα ο περιορισμός της f στο $[0, 1]$ είναι συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$ και

$$f(x) \neq f(x + a), \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1 - a]$$

Παρατήρηση

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συνάρτησης όπως ζητείται στο (ii) είναι η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - x \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{a}\right), \quad x \in [0, 1]$$

Πράγματι η f είναι συνεχής, $f(0) = 0$ και $f(1) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{a}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$, δηλ. $f(0) = f(1)$.

Επίσης για κάθε $x \in [0, 1 - a]$ έχουμε, εφόσον $\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{a} + \pi\right) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, ότι

$$f(x + a) - f(x) = -a \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

Επειδή $a \neq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{a} > 1$, το $\frac{1}{a}$ δεν είναι ακέραιος κι άρα ημ $\left(\frac{\pi}{a}\right) \neq 0$.
Οπότε

$$f(x+a) \neq f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1-a]$$

Άσκηση 51.

Με αντιπαραδείγματα δ.ο. το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ. δεν ισχύει όταν

- i) Η f δεν είναι συνεχής
- ii) Το πεδίο ορισμού της f δεν είναι διάστημα

Λύση.

i) Έστω η $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{εάν } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{εάν } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η f ασυνεχής στο

1.

Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 1$$

και για $y_0 \in (-1, 1) = (f(0), f(2))$ δεν υπάρχει

$x_0 \in [0, 2]$ ώστε $f(x_0) = y_0$.

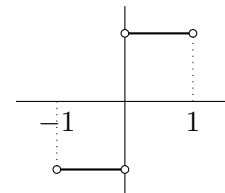
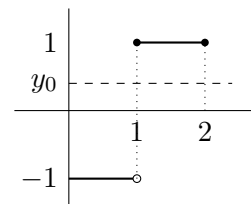
ii) Έστω η $f : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{εάν } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{εάν } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι η f είναι συνεχής (γιατί?)

αλλά το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ. δεν ισχύει

(γιατί?).



Άσκηση 52.

Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα

i) $\eta\mu x = x - 1$ ii) $x^4 + 2x - 11 = 0$ iii) $x = \sigma\upsilon\nu x$ iv) $x 2^x = 1$

Λύση.

i) Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \eta\mu x - (x - 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης έχουμε ότι

$$f(0) = 1, \quad f(\pi) = -\pi + 1 < 0$$

Άρα έχουμε ότι η f συνεχής και το 0 βρίσκεται μεταξύ των τιμών $f(0)$, $f(\pi)$ της f .

Συνεπώς από το Θ.Ε.Τ. (ή το Θεώρημα Bolzano) έχουμε ότι υπάρχει $p \in (0, \pi)$ ώστε

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu p = p - 1$$

ii) Ανάλογα με το (i) παίρνουμε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 2x - 11$, $x \in \mathbb{R}$

(Παρατηρήστε ότι $f(0) = -11$, $f(2) = 9$)

iii) Ανάλογα με το (i) παίρνουμε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

(Παρατηρήστε ότι $f(0) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$)

iv) Ανάλογα με το (i) παίρνουμε την $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x 2^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

(Παρατηρήστε ότι $f(0) = -1$, $f(1) = 1$)

Άσκηση 53.

Έστω $a, b > 0$. Δ.ο. η εξίσωση

$$x = a \text{ ημ } x + b$$

έχει μια θετική πραγματική ρίζα μικρότερη ή ίση του $a + b$.

Λύση.

Έστω η $f : [0, a + b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x - a \text{ ημ } x - b$$

Η f συνεχής. Επίσης

$$\begin{aligned} f(0) &= -b < 0 \quad (\text{αφού } b > 0) \\ f(a + b) &= a + b - a \text{ ημ } (a + b) - b = \\ &= a(1 - \text{ημ } (a + b)) \geq 0 \end{aligned}$$

αφού $a > 0$
και $\text{ημ } (a + b) \leq 1$

Συνεπώς επειδή

$$f(0) < 0, \quad f(a + b) \geq 0$$

έχουμε από το Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $x_0 \in [0, a + b]$ ώστε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = a \text{ ημ } x_0 + b$$

Επειδή $f(0) = -b \neq 0 \Rightarrow x_0 \neq 0$.

Άρα $x_0 > 0$.

Άσκηση 54.

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου n περιττός. Τότε η f έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η f συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε

$$M = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$$

Για $x \geq 1$ παρατηρούμε ότι εάν $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, τότε

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |a_{n-1}x^{n-1}| + \cdots + |a_1x| + |a_0| \stackrel{x \geq 1}{=} \\ &= |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x + |a_0| \end{aligned} \quad (1)$$

Επίσης εφόσον $x \geq 1$, εάν $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ έχουμε ότι

$$x^k \leq x^{n-1}$$

Άρα από (1) έχουμε

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |a_{n-1}|x^{n-1} + |a_{n-2}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x^{n-1} + |a_0|x^{n-1} \\ &= x^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \\ &\leq x^{n-1}(\underbrace{M + \cdots + M}_{n\text{-φορές}}) = nMx^{n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Άρα εάν $x \geq 1$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + g(x) \geq x^n - |g(x)| \stackrel{(2)}{\geq} \\ &\geq x^n - nMx^{n-1} = x^{n-1}(x - nM) \end{aligned} \quad (3)$$

Οπότε εάν $b = nM + 1$ τότε $b \geq 1$ και άρα από (3) έχουμε

$$f(b) \geq b^{n-1}(b - nM) = b^{n-1} > 0$$

Τώρα εάν $x \leq -1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + g(x) \leq x^n + |g(x)| \leq \\ &\leq x^n + |a_{n-1}||x|^{n-1} + \cdots + |a_1||x| + |a_0| \end{aligned}$$

και επειδή $|x| \geq 1$, άρα $|x|^k \leq |x|^{n-1}$ για $k = 0, 1, \dots, n-1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x^n + |a_{n-1}||x|^{n-1} + \cdots + |a_1||x|^{n-1} + |a_0||x|^{n-1} \\ &= x^n + |x|^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \\ &\leq x^n + nM|x|^{n-1} \stackrel{n\text{-περιττός}}{=} x|x|^{n-1} + nM|x|^{n-1} \\ &= |x|^{n-1}(x + nM) \end{aligned} \quad (4)$$

Άρα για $\gamma = -nM - 1$ έχουμε ότι $\gamma \leq -1$ και από (4)

$$f(\gamma) \leq |\gamma|^{n-1}(\gamma + nM) = |\gamma|^{n-1}(-1) < 0$$

Οπότε βρήκαμε $\gamma < b$ ώστε $f(\gamma) < 0 < f(b)$.

Άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει p ώστε $f(p) = 0$.

Άσκηση 55.

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

όπου $a_0 a_n < 0$. Δ.ο. η f έχει θετική ρίζα.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$f(x) = a_n \left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right)$$

Άρα εάν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

τότε

$$f(x) = a_n g(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Όπως στο ??ο λυμένο μπορούμε να δ.ο. υπάρχει $b \geq 1$ ώστε $g(b) > 0$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$g(0) = \frac{a_0}{a_n} < 0 \quad (\text{εφόσον } a_0 a_n < 0)$$

Άρα εφόσον η g συνεχής, από το Θ. Bolzano υπάρχει $p \in (0, b)$ ώστε $g(p) = 0$ και προφανώς

$$f(p) = 0$$

Άρα η f έχει θετική ρίζα.

Άσκηση 56.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.

α) Εάν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι είτε $f > 0$ είτε $f < 0$

β) Εάν $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) > g(1)$, αποδείξτε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση.

α) Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x_1) \leq 0 \text{ και } f(x_2) \geq 0$$

Συνεπώς εφόσον η f συνεχής, από το Θεώρημα Bolzano ή το Θ.Ε.Τ., έχουμε ότι υπάρχει x_0 ανάμεσα στα x_1, x_2 , ώστε $f(x_0) = 0$.

Άτοπο εφόσον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Εφόσον οι f, g συνεχείς $\Rightarrow$ η h συνεχής.

Επίσης εφόσον $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όπως στο (α) έχουμε ότι

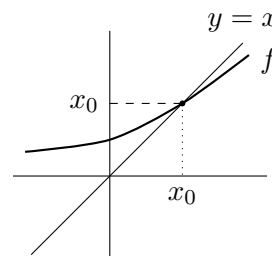
$$\text{είτε } h > 0 \text{ είτε } h < 0$$

Εάν $h < 0 \Rightarrow h(1) < 0 \Rightarrow f(1) < g(1)$. Άτοπο.

Οπότε $h > 0 \Rightarrow f > g$.

Παρατήρηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ θα καλείται **σταθερό σημείο** της f εάν $f(x_0) = x_0$ ή ισοδύναμα εάν το γράφημα της f τέμνει το γράφημα της ευθείας $y = x$ για $x = x_0$.



Άσκηση 57.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ μια συνεχής συνάρτηση. Δ.ο. υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = x_0$ (δηλ. δ.ο. η f έχει σταθερό σημείο).

Λύση.

Έστω η $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - x, \quad x \in [a, b]$$

Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$h(a) = f(a) - a \geq 0 \quad (\text{αφού } f(a) \in [a, b] \Rightarrow f(a) \geq a)$$

και

$$h(b) = f(b) - b \leq 0 \quad (\text{αφού } f(b) \in [a, b] \Rightarrow f(b) \leq b)$$

Οπότε

$$h(b) \leq 0 \leq h(a)$$

και εφόσον η h συνεχής, από το Θεώρημα Bolzano ή το Θ.Ε.Τ., έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

Άσκηση 58.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\max f = \max g$. Δ.ο. υπάρχει $p \in [a, b]$ ώστε $f(p) = g(p)$.

Λύση.

Έστω $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε

$$f(x_1) = \max f, \quad g(x_2) = \max g$$

Έστω η $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a, b]$$

Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επίσης $h(x_1) \geq 0$ και $h(x_2) \leq 0$.

[Πράγματι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g(x_1) &\leq \max g = \max f = f(x_1) \Rightarrow \\ g(x_1) &\leq f(x_1) \Rightarrow f(x_1) - g(x_1) \geq 0 \Rightarrow \\ h(x_1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Ανάλογα (πώς?) δείχνουμε ότι $h(x_2) \leq 0$.]

Συνεπώς επειδή $h(x_1) \geq 0$, $h(x_2) \leq 0$ από το Θεώρημα Bolzano ή το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι υπάρχει p μεταξύ των x_1, x_2 ώστε

$$h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$$

Άσκηση 59.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow [\gamma, \delta]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Δ.ο. υπάρχει $p \in [a, b]$ ώστε $f(p) = g(p)$.

Λύση.

Έστω η $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$.

Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Εφόσον οι f, g είναι επί, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε $f(x_1) = \delta = g(x_2)$.

Παρατηρούμε ότι

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = \delta - g(x_1) \geq 0 \quad (\text{αφού } g(x_1) \in [\gamma, \delta])$$

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - \delta \leq 0 \quad (\text{αφού } f(x_2) \in [\gamma, \delta])$$

Οπότε εφόσον η h συνεχής και $h(x_1) \geq 0$, $h(x_2) \leq 0$, από το Θεώρημα Bolzano ή το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι υπάρχει p μεταξύ των x_1, x_2 (άρα $p \in [a, b]$) ώστε

$$h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$$

Άσκηση 60.

Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0) = f(2)$. Δ.ο. υπάρχει $x \in [0, 1]$ ώστε

$$f(x) = f(x+1) \quad (*)$$

Λύση.

Έστω η $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - f(x+1), \quad x \in [0, 1] \quad (**)$$

Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επίσης

$$h(0) = f(0) - f(1)$$

$$h(1) = f(1) - f(2) \stackrel{f(2)=f(0)}{=} f(1) - f(0)$$

Άρα είναι σαφές ότι $h(0)h(1) \leq 0$. Οπότε από το Θεώρημα Bolzano ή το Θ.Ε.Τ. έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x_0 + 1)$$

(*) Η άσκηση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

“Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(2)$. Δ.ο. υπάρχουν $x, y \in [0, 2]$ με $|x - y| = 1$ ώστε $f(x) = f(y)$ ”

– Κάνουμε ότι κάναμε πριν και θέτουμε $y = x_0 + 1$.

(**) Παίρνουμε πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και όχι το $[0, 2]$ διότι εάν $x \in (1, 2]$ τότε $x + 1 \in (2, 3]$ και άρα η f δεν ορίζεται στο $x + 1$.

Παρατήρηση

Το ακόλουθο θα το χρειαστούμε στην λύση του επόμενου λυμένου προβλήματος.

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής και φθίνουσα.

- i) Δ.ο. η f έχει σταθερό σημείο
- ii) Είναι το σταθερό σημείο της f μοναδικό?

Λύση.

i) Γνωστό (??ο λυμένο).

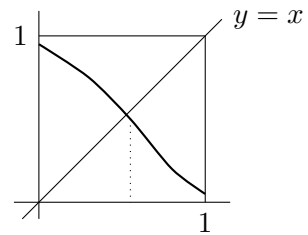
ii) Έστω p_1, p_2 δύο σταθερά σημεία της f με $p_1 < p_2$.

Τότε $f(p_1) = p_1 < p_2 = f(p_2)$.

Άτοπο διότι εφόσον η f φθίνουσα έχουμε ότι

$$f(p_1) \geq f(p_2)$$

Άρα το σταθερό σημείο είναι μοναδικό.



Άσκηση 61.

Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχείς ώστε η f φθίνουσα και $g \circ f = f \circ g$. Δ.ο. υπάρχει $p \in [0, 1]$ ώστε

$$f(p) = p \text{ και } g(p) = p$$

Λύση.

Βήμα 1ο

Δείχνουμε ότι υπάρχει $p \in [0, 1]$ ώστε $f(p) = p$ (??ο λυμένο).

Βήμα 2ο

Από την προηγούμενη Παρατήρηση (ii) η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Βήμα 3ο

Εφόσον $g \circ f = f \circ g \Rightarrow$

$$g(f(p)) = f(g(p)) \xrightarrow{f(p)=p}$$

$$g(p) = f(g(p)) \Rightarrow$$

$$g(p) \text{ σταθερό σημείο της } f$$

και εφόσον η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο το p , έχουμε ότι

$$g(p) = p$$

Άσκηση 62.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε

$$f^2(x) = g^2(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Εάν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ δ.ο.

$$\text{είτε } g = f \text{ είτε } g = -f$$

Λύση.

Κατ' αρχάς εφόσον f συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε ότι

$$\text{είτε } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

$$\text{είτε } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

Έστω ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Παρατηρούμε ότι από υπόθεση για $x = a$ έχουμε

$$f^2(a) = g^2(a) \Rightarrow g(a) = f(a) \text{ ή } g(a) = -f(a)$$

Έστω ότι $g(a) = f(a)$. Θα δ.ο. $g = f$.

Έστω $x_1 \in [a, b]$. Θα δ.ο. $g(x_1) = f(x_1)$.

Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\text{είτε } g(x_1) = f(x_1) \text{ είτε } g(x_1) = -f(x_1)$$

Έστω ότι $g(x_1) = -f(x_1)$ (οπότε $x_1 \neq a$, αφού $g(a) = f(a) \neq -f(a)$).

Εφόσον $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε ότι

$$f(a), f(x_1) > 0 \Rightarrow f(a) > 0, -f(x_1) < 0 \xrightarrow[g(x_1) = -f(x_1)]{g(a) = f(a)}$$

$$g(a) > 0, g(x_1) < 0 \xrightarrow[\Theta. \text{ Bolzano ή } \Theta. \text{ E.T.}]{g \text{ συνεχής}}$$

υπάρχει $p \in (a, x_1)$ ώστε $g(p) = 0 \xrightarrow{\text{υπόθεση}} f(p) = 0$. Άτοπο. Άρα $g(x_1) = f(x_1)$.

Ανάλογα εάν $g(a) = -f(a)$ δείχνουμε ότι $g = -f$, και ανάλογα εργαζόμαστε εάν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Παρατήρηση

Εάν $f(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in [a, b]$, δεν ισχύει εν γένει το συμπέρασμα του προηγούμενου προβλήματος.

Για παράδειγμα, έστω οι $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x, x \in [-1, 1] \quad \text{και} \quad g(x) = |x|, x \in [-1, 1]$$

Τότε προφανώς $f^2 = g^2$ αλλά δεν ισχύει

$$g = f \text{ ή } g = -f$$

Άσκηση 63.

Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \quad (1)$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \underline{\text{είτε}} \quad f(x) &= \sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x \in [-1, 1] \\ \underline{\text{είτε}} \quad f(x) &= -\sqrt{1-x^2} \text{ για κάθε } x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι εάν $a \in (-1, 1)$ τότε από (1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a^2 + (f(a))^2 &= 1 \Rightarrow (f(a))^2 = 1 - a^2 \Rightarrow \\ f(a) &= \sqrt{1-a^2} \quad \text{ή} \quad f(a) = -\sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

Έστω ότι $f(a) = \sqrt{1-a^2}$. Θα δ.ο.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Έστω $x \in (-1, 1)$. Τότε όπως πριν έχουμε ότι

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Εάν $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ παρατηρούμε ότι

$$f(a) > 0, \quad f(x) < 0$$

Άρα εφόσον η f συνεχής από το Θ. Bolzano ή το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι υπάρχει p μεταξύ των a, x ώστε

$$f(p) = 0$$

Άρα από (1) έχουμε

$$p^2 + (f(p))^2 = 1 \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm 1$$

Άτοπο εφόσον $a, x \in (-1, 1)$ και άρα $p \in (-1, 1)$.

Συνεπώς $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Τέλος για $x = \pm 1$ από (1) έχουμε $f(\pm 1) = 0 = \sqrt{1-(\pm 1)^2}$, κι άρα $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Ανάλογα εάν $f(a) = -\sqrt{1-a^2}$.

Άσκηση 64.

Έστω I διάστημα, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

i) Αν $x_1, x_2, x_3 \in I$, δ.ο. υπάρχει $p \in I$ ώστε

$$f(p) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

ii) Αν $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, δ.ο. υπάρχει $p \in I$ ώστε

$$f(p) = \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n}$$

Λύση.

i) Θέτουμε

$$\gamma = \min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\} \quad \text{και} \quad \delta = \max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$$

Είναι σαφές ότι ο γ είναι κάποιος από τους $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. Οπότε ο γ είναι τιμή της f .

Όμοια ο δ τιμή της f .

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \leq f(x_1) \leq \delta \\ \gamma \leq f(x_2) \leq \delta \\ \gamma \leq f(x_3) \leq \delta \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$3\gamma \leq f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leq 3\delta \Rightarrow$$
$$\gamma \leq \underbrace{\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}}_{y_0} \leq \delta$$

Οπότε ο y_0 βρίσκεται μεταξύ δύο τιμών της f , τις γ, δ . Άρα αφού f συνεχής, I διάστημα, από Θ.Ε.Τ., υπάρχει p ώστε $f(p) = y_0$.

ii) Όμοια θέτουμε

$$\gamma = \min\{f(x_k) : k = 1, \dots, n\}$$
$$\delta = \max\{f(x_k) : k = 1, \dots, n\}$$

Οι γ, δ τιμές της f .

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \leq f(x_1) \leq \delta \\ \dots\dots\dots \\ \gamma \leq f(x_n) \leq \delta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$n\gamma \leq \sum_{k=1}^n f(x_k) \leq n\delta \Rightarrow$$
$$\gamma \leq \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n}}_{y_0} \leq \delta$$

Ο y_0 βρίσκεται μεταξύ των τιμών γ, δ της f κι άρα αφού f συνεχής, I διάστημα, από το Θ.Ε.Τ., υπάρχει p ώστε

$$f(p) = y_0$$

Άσκηση 65.

Έστω I διάστημα, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

i) Έστω $\lambda \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in I$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $p \in I$ ώστε

$$f(p) = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

ii) Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ ώστε $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ και $x_1, x_2 \in I$. Δ.ο. υπάρχει $p \in I$ ώστε

$$f(p) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

iii) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$ ώστε $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ και $x_1, \dots, x_n \in I$. Δ.ο. υπάρχει $p \in I$ ώστε

$$f(p) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Λύση.

ii) Έστω $\gamma = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$, $\delta = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.

Είναι σαφές ότι γ, δ τιμές της f .

Επίσης

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \leq f(x_1) \leq \delta \xrightarrow{\lambda_1 > 0} \lambda_1 \gamma \leq \lambda_1 f(x_1) \leq \lambda_1 \delta \\ \gamma \leq f(x_2) \leq \delta \xrightarrow{\lambda_2 > 0} \lambda_2 \gamma \leq \lambda_2 f(x_2) \leq \lambda_2 \delta \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} (\lambda_1 + \lambda_2)\gamma \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leq (\lambda_1 + \lambda_2)\delta$$

και εφόσον $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, έχουμε

$$\gamma \leq \underbrace{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}_{y_0} \leq \delta$$

Εφόσον f συνεχής, I διάστημα και ο y_0 βρίσκεται μεταξύ δύο τιμών της f , τις γ, δ , έπεται από το Θ.Ε.Τ. ότι υπάρχει $p \in I$ ώστε $f(p) = y_0$.

i) Κάνουμε ότι και στην (ii) θέτοντας $\lambda_1 = 1 - \lambda$, $\lambda_2 = \lambda$.

iii) Ακριβώς όπως το (ii).

Άσκηση

Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, I διάστημα και $x_1, x_2, x_3 \in I$. Δ.ο. υπάρχει $p \in I$ ώστε

$$f(p) = \frac{3}{8}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + \frac{1}{8}f(x_3)$$

Υπόδ. Είναι το (iii) με $\lambda_1 = \frac{3}{8}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{8}$ (άθροισμα 1).

Άσκηση 66.

α) Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, I διάστημα, ώστε

$$f(x) \in \mathbb{Q}, \text{ για κάθε } x \in I$$

Αποδείξτε ότι η f σταθερή.

β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $f(\sqrt{e}) = \pi$. Ποια η $f(3)$?

Λύση.

α) Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f όχι σταθερή. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ ώστε

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Από πυκνότητα αρρήτων, υπάρχει $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ανάμεσα στους $f(x_1), f(x_2)$.

Εφόσον η f συνεχής, I διάστημα, από το Θ.Ε.Τ., υπάρχει $x_0 \in I$ ώστε

$$f(x_0) = \tau$$

Άτοπο διότι $f(x_0) \in \mathbb{Q}$ και $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Άρα η f σταθερή.

β) α' τρόπος

Όπως στο (α) δείχνουμε ότι η f σταθερή. Οπότε εφόσον $f(\sqrt{e}) = \pi$, έπεται ότι

$$f(x) = \pi, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3) = \pi$$

β' τρόπος

Θα δ.ο. $f(3) = \pi$. Προς άτοπο έστω ότι $f(3) \neq \pi$.

Εφόσον $f(\sqrt{e}) = \pi$, έχουμε ότι

$$f(\sqrt{e}) \neq f(3)$$

Από πυκνότητα ρητών, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ανάμεσα στους $f(\sqrt{e}), f(3)$.

Εφόσον f συνεχής, από Θ.Ε.Τ., υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = q$.

Άτοπο αφού από υπόθεση το $f(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Παρατηρήσεις

1) Ένα $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα εάν

“για κάθε $x, y \in I$ με $x \leq y$ ισχύει ότι $[x, y] \subseteq I$ ”

δηλ. για κάθε $x, y \in I$ οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των x, y βρίσκεται στο I .

2) Τα μονοσύνολα είναι διαστήματα, δηλ. για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $\{a\}$ είναι διάστημα.

3) Εάν I διάστημα και $I \subseteq \{1, 2, 3\}$ μη κενό τότε το I είναι μονοσύνολο.

[Πράγματι έστω ότι το I όχι μονοσύνολο και $a, b \in I$ με $a \neq b$. Έστω ότι $a < b$. Εφόσον I διάστημα $\Rightarrow [a, b] \subseteq I \xrightarrow{\text{υπόθεση}} [a, b] \subseteq \{1, 2, 3\}$. Προφανώς άτοπο.]

4) Εάν I διάστημα μη κενό και $I \subseteq \mathbb{Z}$ (ή $I \subseteq \mathbb{N}$) τότε το I μονοσύνολο (γιατί?)

5) Εάν I διάστημα μη κενό και $I \subseteq \mathbb{Q}$ τότε το I μονοσύνολο.

[Πράγματι έστω ότι το I όχι μονοσύνολο και έστω $a, b \in I$ με $a \neq b$. Έστω ότι $a < b$. Από πυκνότητα αρρήτων υπάρχει $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < \tau < b$. Εφόσον I διάστημα και $a, b \in I$, έχουμε ότι $[a, b] \subseteq I \xrightarrow{a < \tau < b} \tau \in I$. Άτοπο εφόσον $I \subseteq \mathbb{Q}$.]

6) (β' τρόπος για ?? (α))

Εφόσον f συνεχής, το I διάστημα, από το Θ.Ε.Τ. (Πόρισμα 6.5.4) έχουμε ότι το $f(I)$ διάστημα. Επίσης από υπόθεση το $f(I) \subseteq \mathbb{Q}$.

Άρα το $f(I)$ διάστημα και υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Όπως στο (5), το $f(I)$ μονοσύνολο κι άρα η f είναι σταθερή.

Άσκηση 67.

Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα ώστε

$$|f(x)| = 1 \text{ για κάθε } x \in I$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in I$ ισχύει ότι

$$|f(x)| = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \text{ ή } f(x) = -1 \quad (1)$$

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f όχι σταθερή. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ ώστε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Εφόσον $f(x_1) \neq f(x_2)$, από (1) έχουμε ότι

$$\text{είτε } f(x_1) = -1, f(x_2) = 1$$

$$\text{είτε } f(x_1) = 1, f(x_2) = -1$$

Σε κάθε περίπτωση το μηδέν βρίσκεται μεταξύ των τιμών $f(x_1), f(x_2)$ της συνεχούς συνάρτησης f . Οπότε από το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι υπάρχει x_0 ανάμεσα στα x_1, x_2 ώστε $f(x_0) = 0$.

Άτοπο εφόσον $|f(x_0)| = 1$.

β' τρόπος

Έχουμε ότι εφόσον για κάθε $x \in I$ ισχύει $f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$, το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $\{-1, 1\}$, δηλ.

$$f(I) \subseteq \{-1, 1\} \quad (2)$$

Επειδή I διάστημα, f συνεχής $\Rightarrow$ το $f(I)$ διάστημα $\stackrel{(2)}{\implies} f(I) = \{-1\}$ ή $f(I) = \{1\}$.
Συνεπώς η f σταθερή.

Άσκηση 68.

Εξετάστε εάν υπάρχει

- i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f(2) = \sqrt{2}$
- ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ συνεχής και επί συνάρτηση
- iii) $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{Q}$ συνεχής και επί συνάρτηση
- iv) $f : (-1, 4] \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ συνεχής και επί συνάρτηση
- v) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ συνεχής και μη σταθερή
- vi) $f : [0, 1] \rightarrow (0, 2]$ συνεχής και επί
- vii) $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ 1-1, συνεχής και επί

Λύση.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Σε όλες η απάντηση είναι όχι. Χρησιμοποίησε ότι η εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα (Πόρισμα 6.5.4).

i) Το $f(\mathbb{R})$ διάστημα μέσα στο $\mathbb{Q}$, άρα μονοσύνολο· όμως $f(0) \neq f(2)$. ii), iii), iv) Τα $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι διαστήματα. v) Το $f(\mathbb{R})$ διάστημα μέσα στο $\mathbb{Z}$, άρα μονοσύνολο. vi) Η εικόνα του $[0, 1]$ είναι κλειστό διάστημα (6.5.11), ενώ το $(0, 2]$ δεν είναι. vii) Η f είναι γνησίως μονότονη (??ο λυμένο), άρα το $f(0)$ θα ήταν ελάχιστο ή μέγιστο του $(0, 1)$ · άτοπο.

Άσκηση 69.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο, δηλ. ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = x_0$.

Λύση.

Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$f(x) \neq x \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω η $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και από (1) έχουμε ότι

$$h(x) \neq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από το Θ. Bolzano (??ο λυμένο (α)) έχουμε ότι

$$\text{είτε } h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{είτε } h(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x \quad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $a_0 \in \mathbb{R}$ με $a_0 > 0$ και $a_0 > f(0)$ (3)

Εφόσον η f φθίνουσα, $a_0 > 0 \Rightarrow$

$$f(a_0) \leq f(0) \stackrel{(3)}{<} a_0$$

Άτοπο εφόσον από (2) έχουμε ότι $f(a_0) > a_0$.

Ανάλογα καταλήγουμε σε άτοπο εάν $h(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, παίρνοντας $a_0 < 0$ με $a_0 < f(0)$.

Άρα υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = x_0$.

Άσκηση 70.

Έστω I διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Λύση.

Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

1) Για κάθε $a, b, \gamma \in I$ με $a < b < \gamma$ ισχύει ότι

$$\text{είτε } f(a) < f(b) < f(\gamma)$$

$$\text{είτε } f(a) > f(b) > f(\gamma)$$

[Πράγματι έστω $a, b, \gamma \in I$ με $a < b < \gamma$. Έστω ότι δεν ισχύει το παραπάνω. Τότε

$$\text{είτε } f(b) < f(a) < f(\gamma) \quad (1)$$

$$\text{είτε } f(b) < f(\gamma) < f(a) \quad (2)$$

$$\text{είτε } f(a) < f(\gamma) < f(b) \quad (3)$$

$$\text{είτε } f(\gamma) < f(a) < f(b) \quad (4)$$

(αποκλείεται να έχουμε ισότητες εφόσον η f είναι 1-1)

Ας υποθέσουμε ότι $f(b) < f(a) < f(\gamma)$.

Εφαρμόζοντας το Θ.Ε.Τ. για την f στο $[b, \gamma]$ έχουμε ότι επειδή το $f(a)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(b), f(\gamma)$, υπάρχει $p \in (b, \gamma)$ ώστε

$$f(p) = f(a)$$

Άτοπο διότι $p \in (b, \gamma)$ και άρα $p \neq a \xrightarrow{1-1} f(p) \neq f(a)$.

Ανάλογα καταλήγουμε σ' άτοπο εάν υποθέσουμε ότι ισχύει κάποια από τις (2)–(4).]

2) Για κάθε $a, b, \gamma, \delta \in I$ με $a < b < \gamma < \delta$ ισχύει ότι

$$\text{είτε } f(a) < f(b) < f(\gamma) < f(\delta)$$

$$\text{είτε } f(a) > f(b) > f(\gamma) > f(\delta)$$

[Από το προηγούμενο έχουμε ότι επειδή $a < b < \gamma$ τότε

$$\text{είτε } f(a) < f(b) < f(\gamma) \text{ είτε } f(a) > f(b) > f(\gamma)$$

Έστω ότι

$$f(a) < f(b) < f(\gamma) \quad (5)$$

Επίσης πάλι από το προηγούμενο επειδή $b < \gamma < \delta$ έχουμε ότι

$$\text{είτε } f(b) < f(\gamma) < f(\delta) \text{ είτε } f(b) > f(\gamma) > f(\delta)$$

Οπότε επειδή $f(b) < f(\gamma)$ έχουμε ότι

$$f(b) < f(\gamma) < f(\delta) \quad (6)$$

Από (5), (6) $\Rightarrow f(a) < f(b) < f(\gamma) < f(\delta)$.]

3) Έστω $a, b \in I$ με $a < b$. Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) $f(a) < f(b)$

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Πράγματι έστω $x, y \in I$ με $x < y$. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις

α) $x = a, y = b$.

Τότε $f(x) = f(a) < f(b) = f(y)$

β) $x = a, y \neq b$. Τότε

εάν $a < b < y$ από το πρώτο βήμα έχουμε ότι

είτε $f(a) < f(b) < f(y)$ είτε $f(a) > f(b) > f(y)$

Οπότε εφόσον $f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b) < f(y) \xrightarrow{x=a} f(x) < f(y)$

εάν $a < y < b$ ανάλογα με πριν έχουμε ότι $f(x) < f(y)$

γ) $x \neq a, y = b$

Όπως και στην περίπτωση (β)

δ) $x \neq a, y \neq b$

Τότε συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα

$$x < y < a < b \quad (7)$$

$$a < x < y < b \quad (8)$$

$$a < b < x < y \quad (9)$$

$$a < x < b < y \quad (10)$$

$$x < a < y < b \quad (11)$$

$$x < a < b < y \quad (12)$$

(ή $x = b$ ή $y = a$, οπότε τα x, y, a, b είναι τρία διαφορετικά σημεία και εφαρμόζουμε το πρώτο βήμα)

Έστω ότι $x < y < a < b$. Τότε από το δεύτερο βήμα έχουμε ότι

είτε $f(x) < f(y) < f(a) < f(b)$

είτε $f(x) > f(y) > f(a) > f(b)$

Άρα εφόσον $f(a) < f(b)$ έπεται ότι

$$f(x) < f(y) < f(a) < f(b) \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Ανάλογα και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

ii) $f(a) > f(b)$

Τότε ανάλογα με την περίπτωση (i) δείχνουμε ότι η f γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 71.

Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση όπου I κλειστό διάστημα ώστε $I \subseteq f(I)$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Λύση.

Έστω ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο, δηλ. υποθέτουμε ότι

$$f(x) \neq x$$

για κάθε $x \in I$.

Άρα εάν $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$, $x \in I$, έχουμε ότι η h συνεχής και

$$h(x) \neq 0$$

για κάθε $x \in I$.

Οπότε από Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι

$$\text{είτε } h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in I$$

$$\text{είτε } h(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in I$$

Έστω ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Τότε

$$f(x) > x \quad (1)$$

για κάθε $x \in I$.

Εφόσον η f συνεχής στο I , το I κλειστό διάστημα έχουμε ότι υπάρχουν $x_0, x_1 \in I$ ώστε

$$f(I) = [f(x_0), f(x_1)] \quad (2)$$

(από την 6.5.11).

Παρατηρούμε ότι εάν $I = [a, b]$ έχουμε από (2) και από την υπόθεση ($I \subseteq f(I)$) ότι

$$[a, b] \subseteq [f(x_0), f(x_1)] \Rightarrow f(x_0) \leq a$$

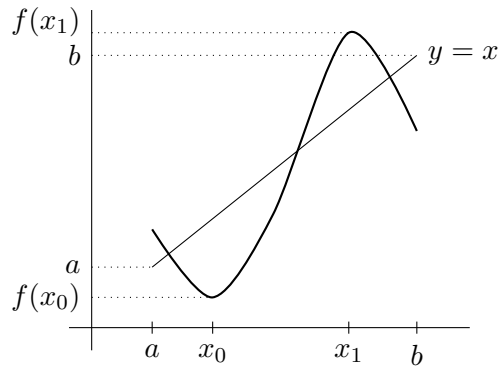
Άρα έχουμε ότι

$$a \geq f(x_0) \stackrel{(1)}{>} x_0 \geq a \Rightarrow a > a$$

Προφανώς άτοπο.

Ανάλογα εάν $h(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, έχουμε $f(x_1) \geq b$ και $b \leq f(x_1) < x_1 \leq b$.

Άτοπο.



Διαισθητικά είναι σαφές ότι εφόσον $f(x_0) \leq a$, $f(x_1) \geq b$ και η f συνεχής, τότε η γραφική της παράσταση έχει κοινό σημείο με την $y = x$ και άρα η f έχει σταθερό σημείο.

Άσκηση 72.

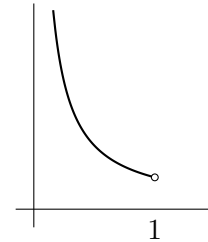
Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης f ορισμένη σε φραγμένο διάστημα ώστε

- i) Η f δεν είναι φραγμένη
- ii) Η f είναι φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή
- iii) Ποιο το συμπέρασμα σας σε σχέση με τα Θεωρήματα 6.5.9, 6.5.10

Λύση.

i) Έστω η $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$.

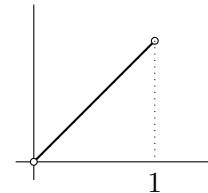
Η f όχι φραγμένη (γιατί?)



ii) Έστω η $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, $x \in (0, 1)$.

Τότε η f φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή.

[Πράγματι το να έχει μέγιστη τιμή η f είναι ισοδύναμο με το να έχει maximum το σύνολο τιμών της f , δηλ. το $f((0, 1)) = (0, 1)$ και το οποίο προφανώς δεν έχει maximum.]



iii) Δικό σας αυτό.

Υπόδ. Οι υποθέσεις “συνεχής” και “κλειστό διάστημα” στα Θεωρήματα 6.5.9, 6.5.10 δεν μπορούν να παραλειφθούν· δεν αρκεί το πεδίο ορισμού να είναι φραγμένο διάστημα.

Άσκηση 73.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε

$$f(x) < g(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δ.ο. $\max(f) < \max(g)$.

(με $\max(f)$ συμβολίζουμε τη μέγιστη τιμή της f η οποία υπάρχει εφόσον η f συνεχής σε κλειστό διάστημα)

Λύση.

Έστω $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε

$$f(x_1) = \max(f), \quad g(x_2) = \max(g)$$

Έχουμε ότι

$$f(x_1) \underset{\text{υπόθεση}}{<} g(x_1) \leq g(x_2)$$

Άρα

$$\max(f) < \max(g)$$

Άσκηση 74.

Έστω $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς. Υποθέτουμε ότι

“για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in [0, 1]$,
υπάρχει $y \in [0, 1]$ ώστε $f(x) \leq g(y) + \varepsilon$ ”

Αποδείξτε ότι $\max f \leq \max g$.

Λύση.

Κατ’ αρχάς παρατηρούμε ότι υπάρχουν οι $\max f$, $\max g$, εφόσον οι f, g συνεχείς σε κλειστό διάστημα.

Έστω $x_1 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_1) = \max f$.

Παρατηρούμε ότι

$$\max f \leq \max g + \varepsilon, \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0$$

[Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Από υπόθεση για $x = x_1$, υπάρχει $y \in [0, 1]$ ώστε

$$f(x_1) \leq g(y) + \varepsilon \xrightarrow[g(y) \leq \max g]{f(x_1) = \max f}$$

$$\max f \leq g(y) + \varepsilon \leq \max g + \varepsilon]$$

Τώρα εφόσον

$$\max f \leq \max g + \varepsilon, \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0$$

έπεται ότι $\max f \leq \max g$ (*)

(*) Γενικά εάν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $a \leq b$.

[Πράγματι προς άτοπο υποθέτουμε ότι $a > b$. Τότε για $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ (αφού $a > b$), από υπόθεση έχουμε ότι

$$a \leq b + \frac{a-b}{2} = \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}(b+a) \stackrel{b < a}{<} \frac{1}{2}(a+a) = a$$

$\Rightarrow a < a$. Άτοπο.]

(Κοίτα και το 12 λυμένο από κεφ. 1 καθώς και το 12 λυμένο από κεφ. 2)

Άσκηση 75.

i) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δ.ο. υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) \geq \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

ii) Ισχύει το συμπέρασμα εάν αντικαταστήσουμε το $[a, b]$ με το $(a, b]$?

Λύση.

i) Εφόσον f συνεχής σε κλειστό διάστημα υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \quad (1)$$

Έστω $\rho = f(x_0)$. Τότε εφόσον $f(x_0) > 0$ έχουμε ότι $\rho > 0$ και $\rho \overset{\text{από την (1)}}{\leq} f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.

ii) Εν γένει όχι.

Για παράδειγμα έστω η $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, $x \in (0, 1]$.

Τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ αλλά δεν υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) \geq \rho$ για κάθε $x \in (0, 1]$ διότι εάν υπήρχε θα είχαμε

$$f(x) = x \geq \rho \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1]$$

Άτοπο (π.χ. για $x = \min\{\frac{\rho}{2}, 1\}$).

Άσκηση 76.

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$ ώστε $f + \rho < g$.

Λύση.

Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h = g - f$.

Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών και από υπόθεση

$$h(x) > 0 \quad (1)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Εφόσον h συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, υπάρχει το $\min h$, δηλ. υπάρχει $x_1 \in [a, b]$ ώστε

$$h(x_1) \leq h(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b] \quad (2)$$

Θέτουμε $\lambda = h(x_1)$. Από (1) το $\lambda > 0$.

Επίσης από (2) για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\lambda \leq g(x) - f(x) \Rightarrow f(x) + \lambda \leq g(x)$$

Θέτοντας $\rho = \lambda/2 > 0$ έχουμε ότι εάν $x \in [a, b]$ τότε

$$f(x) + \rho < f(x) + \lambda \leq g(x) \Rightarrow$$

$$f(x) + \rho < g(x)$$

Παρατηρήσεις για τα δύο επόμενα προβλήματα

1) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x + a), \quad x \in \mathbb{R}$$

Τότε οι f, g έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

[Πράγματι θα δ.ο. $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$.

Έστω $y_0 \in f(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $y_0 = f(x_0)$.

Παρατηρούμε ότι για $x = x_0 - a$ έχουμε

$$g(x) = f(x_0 - a + a) = f(x_0) = y_0$$

Άρα το y_0 τιμή της $g \Rightarrow y_0 \in g(\mathbb{R})$.

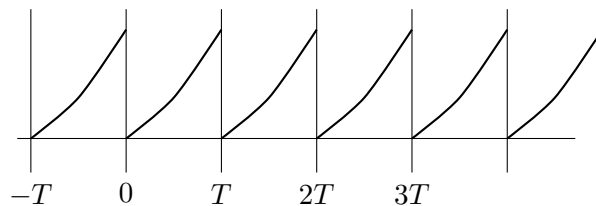
Αντίστροφα εάν $y_0 \in g(\mathbb{R}) \Rightarrow$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x_0) = y_0 \Rightarrow f(x_0 + a) = y_0 \Rightarrow y_0 \in f(\mathbb{R})$.]

2) Μια $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται **περιοδική**, εάν υπάρχει $T > 0$ ώστε

$$f(x + T) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ισχύει ότι εάν f περιοδική με περίοδο T τότε

i) “Όπως είναι” η f στο $[0, T]$ είναι σε καθένα από τα $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, ... και γενικότερα στο $[kT, (k+1)T]$ όπου $k \in \mathbb{Z}$



ii) Το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f είναι ίσο με το σύνολο τιμών της στο $[0, T]$, δηλ. το $f([0, T])$

[Πράγματι, εάν $x \in \mathbb{R}$ και $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$, τότε $x - kT \in [0, T)$ και $f(x) = f(x - kT)$ (γιατί?). Άρα $f(\mathbb{R}) \subseteq f([0, T])$, ενώ προφανώς $f([0, T]) \subseteq f(\mathbb{R})$.]

iii) Αν η f συνεχής τότε έχει max και min

[Πράγματι επειδή η f συνεχής έχει max και min στο $[0, T]$ τα οποία είναι max και min της f στο $\mathbb{R}$ εφόσον $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$.]

Άσκηση 77.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

α) Εάν η f έχει $\max$ δ.ο. για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = f(x_0 + a)$

β) Εάν η f περιοδική με περίοδο $T > 0$, αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x_0) = f(x_0 + a)$$

Λύση.

α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x + a), \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι σαφές ότι οι g, f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών. Συνεπώς εφόσον η f έχει $\max$ το ίδιο συμβαίνει με την g και μάλιστα

$$\max f = \max g \quad (1)$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = \max f$, $g(x_2) = \max g$.

Έστω η $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h = f - g$. Η h συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επίσης

$$\text{i) } h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = \max f - g(x_1) \stackrel{(1)}{=} \max g - g(x_1) \geq 0$$

$$\text{ii) } h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - \max g \stackrel{(1)}{=} f(x_2) - \max f \leq 0$$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano ή το Θ.Ε.Τ., υπάρχει x_0 ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0) = f(x_0 + a)$$

β) Εφόσον η f περιοδική με περίοδο T , το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο τιμών της στο $[0, T]$. Εφόσον η f συνεχής, στο $[0, T]$ έχει μέγιστη τιμή και εφόσον $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$ έπεται ότι η f έχει $\max$.

Μετά συνεχίζουμε όπως στο (α).

Άσκηση 78.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$, υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$|f(y)| \leq \frac{|f(x)|}{2}$$

Δ.ο. υπάρχει $p \in [a, b]$ ώστε $f(p) = 0$.

Λύση.

Έστω ότι

$$f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \quad (1)$$

Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g = |f|$.

Από (1) $\Rightarrow g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$

$$\xrightarrow[\text{αφού η } f \text{ είναι συνεχής}]{g} g > 0 \text{ ή } g < 0 \xrightarrow{g \geq 0} g > 0$$

Από υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$, υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $g(y) \leq \frac{g(x)}{2}$.

Έστω $x_1 \in [a, b]$ ώστε

$$g(x_1) = \min g$$

(υπάρχει το x_1 εφόσον η g συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$).

Από την υπόθεση για $x = x_1$, υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$g(y) \leq \frac{g(x_1)}{2} <_{g(x_1) > 0} g(x_1)$$

Άτοπο διότι αφού $g(x_1) = \min g \Rightarrow g(x_1) \leq g(y)$.

Άρα υποθέσαμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και καταλήξαμε σε άτοπο. Οπότε υπάρχει $p \in [a, b]$ με $f(p) = 0$.

Άσκηση 79.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, (x_n) ακολουθία στοιχείων του $[a, b]$ ώστε $f(x_n) \rightarrow 0$.
Δ.ο. υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Λύση.

Έστω ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε εφόσον η f συνεχής έχουμε από Bolzano (ή Θ.Ε.Τ.) ότι

$$\text{είτε } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

$$\text{είτε } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

Έστω ότι

$$f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \quad (1)$$

Εφόσον η f συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχει $p \in [a, b]$ ώστε

$$f(p) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Από (1) έχουμε $f(p) > 0$.

Εφόσον $f(x_n) \rightarrow 0$, για $\varepsilon = f(p) > 0$ υπάρχει

$n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε



$$|f(x_n) - 0| < \varepsilon = f(p) \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 \quad \xRightarrow{f(x_n) > 0}$$

$$f(x_n) < f(p) \quad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

Άτοπο εφόσον $f(p) = \min f$ και άρα $f(x_n) \geq f(p) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Εάν τώρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, έστω $p_1 \in [a, b]$ ώστε $f(p_1) = \max f$.

Άρα $f(x_n) \rightarrow 0$, για $\varepsilon = -f(p_1) > 0$ (αφού $f(p_1) < 0$), έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{εάν } n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n)| < \varepsilon = -f(p_1) \quad \xRightarrow{f(x_n) < 0} -f(x_n) < -f(p_1) \Rightarrow f(x_n) > f(p_1)$$

Άτοπο διότι αφού $f(p_1) = \max f \Rightarrow f(x_n) \leq f(p_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

β' τρόπος

Η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ κι άρα υπάρχουν τα $\max f, \min f$. Έστω $y_1, y_2 \in [a, b]$ ώστε

$$m = f(y_1) = \min f, \quad f(y_2) = \max f = M$$

Εφόσον $m \leq f(x_n) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \rightarrow 0$, έπεται ότι

$$m \leq 0 \leq M \Rightarrow f(y_1) \leq 0 \leq f(y_2)$$

Οπότε από Θ.Ε.Τ., υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ και μάλιστα μεταξύ των y_1, y_2 , ώστε $f(x_0) = 0$.

Άσκηση 80.

α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής η οποία παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές, δηλ. για κάθε $y \in f(\mathbb{R})$, υπάρχουν ακριβώς δύο x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = y = f(x_2)$.

β) Βρείτε μια συνεχή συνάρτηση η οποία να παίρνει κάθε τιμή της ακριβώς 3 φορές.

Λύση.

α) Προς άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια f .

Έστω y_0 τιμή της f . Από υπόθεση υπάρχουν ακριβώς δύο $a, b \in \mathbb{R}$ με $f(a) = y_0 = f(b)$. Έστω ότι $a < b$.

Παρατηρούμε ότι

είτε $f(x) > y_0$ για κάθε $x \in (a, b)$

είτε $f(x) < y_0$ για κάθε $x \in (a, b)$

[Πράγματι εάν όχι, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $f(x_1) \leq y_0 \leq f(x_2)$. Οπότε από το Θ.Ε.Τ. υπάρχει x_0 ανάμεσα στα x_1, x_2 κι άρα $x_0 \in (a, b)$ ώστε

$$f(x_0) = y_0$$

Οπότε $f(a) = f(b) = f(x_0) = y_0$ και τα a, b, x_0 διαφορετικά ανά δύο. Δηλ. η f παίρνει την τιμή y_0 τρεις φορές. Άτοπο.]

Έστω ότι

$$f(x) > y_0 = f(a) = f(b) \quad \text{για κάθε } x \in (a, b) \quad (1)$$

Εφόσον η f συνεχής, στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ λαμβάνει μέγιστη τιμή, δηλ. υπάρχει $x_1 \in [a, b]$ ώστε

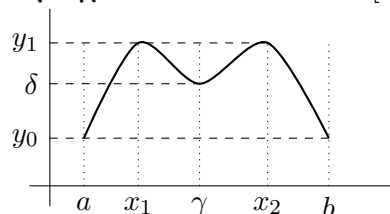
$$f(x) \leq f(x_1) \quad \text{για κάθε } x \in [a, b]$$

Από (1) έχουμε ότι $x_1 \neq a, b$ κι άρα $x_1 \in (a, b)$.

Θέτουμε $y_1 = f(x_1)$. Από υπόθεση υπάρχει $x_2 \neq x_1$ ώστε $f(x_2) = y_1$.

Παρατηρούμε ότι $x_2 \notin [a, b]$.

[Πράγματι έστω ότι $x_2 \in [a, b]$ με $f(x_2) = y_1 = \max_{[a,b]} f$.



Έστω ότι $x_1 < x_2$.

Έστω $\gamma \in (x_1, x_2)$ και $\delta = f(\gamma)$.

Είναι σαφές ότι $y_0 < \delta < y_1$ (γιατί?)

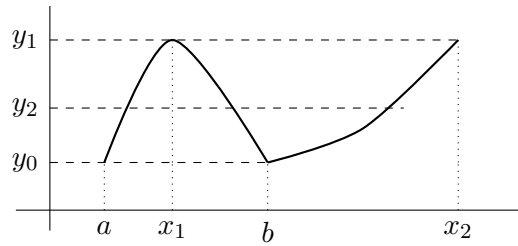
Οπότε

$$f(a) < \delta < f(x_1) \quad \text{και} \quad f(b) < \delta < f(x_2)$$

Συνεπώς από το Θ.Ε.Τ., υπάρχουν

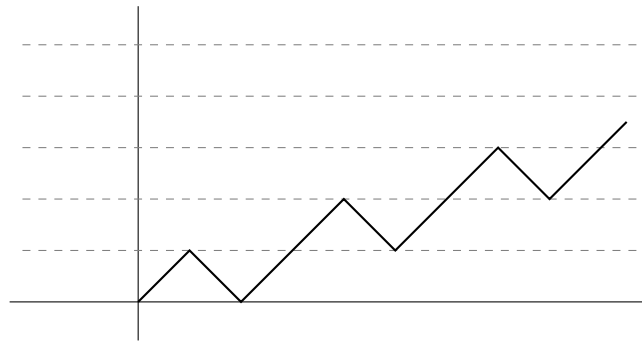
$$z_1 \in (a, x_1), z_2 \in (x_2, b) \quad \text{με} \quad f(z_1) = f(z_2) = \delta$$

Οπότε $f(z_1) = f(z_2) = f(\gamma) = \delta$ και τα z_1, z_2, γ διαφορετικά ανά δύο. Άτοπο.]
 Συνεπώς το $x_2 \notin [a, b] \Rightarrow x_2 \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.



Εύκολα με Θ.Ε.Τ. μπορούμε να δ.ο. εάν $y_2 \in (y_0, y_1)$ τότε η f παίρνει την τιμή y_2 3-φορές. Άτοπο.

β)



Παρατήρηση

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για το (β), ορισμένο σε όλο το $\mathbb{R}$, είναι η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα σημεία

$$(2m, m) \text{ και } (2m+1, m+2), \quad m \in \mathbb{Z}$$

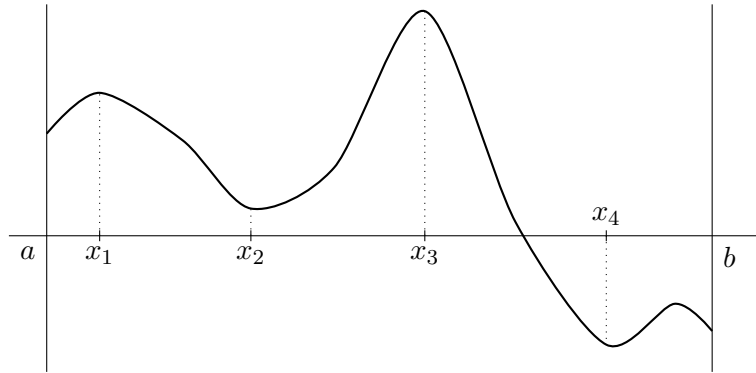
δηλ. η f είναι γραμμική σε κάθε $[2m, 2m+1]$ (ανεβαίνει από το m στο $m+2$) και σε κάθε $[2m+1, 2m+2]$ (κατεβαίνει από το $m+2$ στο $m+1$). Η f είναι συνεχής, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ λαμβάνεται ακριβώς τρεις φορές: εάν $n < y < n+1$ με $n \in \mathbb{Z}$, μία φορά σε καθένα από τα $(2n-2, 2n-1)$, $(2n-1, 2n)$, $(2n, 2n+1)$, ενώ εάν $y = n \in \mathbb{Z}$, στα σημεία $2n-3, 2n$ και σε ένα σημείο του $(2n-2, 2n-1)$.

Υπενθύμιση

Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι το x_0 είναι **σημείο τοπικού μεγίστου** εάν υπάρχει $\rho > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \cap X$$

– Ανάλογα ορίζεται το **τοπικό ελάχιστο**.



– Παρατηρούμε ότι για την $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ του σχήματος τα a, x_2, x_4, b είναι σημεία τοπικού ελαχίστου ενώ τα x_1, x_3 τοπικού μεγίστου.

Επίσης στο x_3 η f λαμβάνει την μέγιστη τιμή της, δηλ. $f(x_3) = \max f$ και στο x_4 την ελάχιστη τιμή της, δηλ. $f(x_4) = \min f$.

Άσκηση 81.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε κανένα σημείο του (a, b) . Αποδείξτε ότι η f είναι μονότονη στο $[a, b]$.

Λύση.

Ισχυρισμός 1

Εάν $\gamma < \delta$ με $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ τότε

α) εάν $f(\gamma) \leq f(\delta)$ ισχύει ότι $f(\gamma) = \min_{[\gamma, \delta]} f$, $f(\delta) = \max_{[\gamma, \delta]} f$

και

β) εάν $f(\gamma) \geq f(\delta)$ ισχύει ότι $f(\gamma) = \max_{[\gamma, \delta]} f$, $f(\delta) = \min_{[\gamma, \delta]} f$

Απόδειξη ισχυρισμού 1

α) Έστω ότι $f(\gamma) \leq f(\delta)$. Εφόσον η f συνεχής στο $[\gamma, \delta]$ έχουμε ότι υπάρχουν τα $\min_{[\gamma, \delta]} f$ και $\max_{[\gamma, \delta]} f$, δηλ. υπάρχουν $x_0, x_1 \in [\gamma, \delta]$ ώστε

$$f(x_0) = \min_{[\gamma, \delta]} f, \quad f(x_1) = \max_{[\gamma, \delta]} f$$

Θα δείξουμε ότι

$$\text{i) } f(\delta) = f(x_1) \quad \text{και} \quad \text{ii) } f(\gamma) = f(x_0)$$

Για το (i) έχουμε

Εφόσον $f(x_1) = \max_{[\gamma, \delta]} f$, δηλ. $f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [\gamma, \delta]$, έπεται ότι $f(\delta) \leq f(x_1)$.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι

$$f(\delta) < f(x_1) \quad (1)$$

Επειδή $f(\gamma) \leq f(\delta)$, έχουμε ότι

$$f(\gamma) < f(x_1) \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow x_1 \neq \gamma$ και $x_1 \neq \delta$.

Άρα $x_1 \in (\gamma, \delta)$. Έστω $\rho > 0$ ώστε

$$(x_1 - \rho, x_1 + \rho) \subseteq (\gamma, \delta)$$

A horizontal line segment representing the interval (γ, δ) . The endpoints are labeled γ and δ . A point x_1 is marked between γ and δ . A smaller interval $(x_1 - \rho, x_1 + \rho)$ is indicated by parentheses centered at x_1 , showing it is contained within (γ, δ) .

Εφόσον $f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [\gamma, \delta]$, έπεται ότι

$$f(x) \leq f(x_1), \quad \text{για κάθε } x \in (x_1 - \rho, x_1 + \rho)$$

Άρα το x_1 σημείο τοπικού μεγίστου της f και $x_1 \in (\gamma, \delta) \subseteq (a, b)$. Άτοπο.

Οπότε δεν μπορεί να ισχύει $f(\delta) < f(x_1)$ και εφόσον $f(\delta) \leq f(x_1)$, έχουμε ότι $f(\delta) = f(x_1)$.

Το (ii) αποδεικνύεται ανάλογα.

β) Ανάλογα με το (α).

Ισχυρισμός 2

α) Εάν $f(a) \leq f(b)$ τότε η f αύξουσα

β) Εάν $f(a) \geq f(b)$ τότε η f φθίνουσα

Απόδειξη ισχυρισμού 2

α) Έστω $x, y \in [a, b]$ με $x < y$. Θα δ.ο. $f(x) \leq f(y)$.

Από ισχυρισμό 1 έχουμε ότι επειδή $f(a) \leq f(b)$ τότε

$$f(a) = \min_{[a,b]} f \quad \text{και} \quad f(b) = \max_{[a,b]} f$$

Συνεπώς

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad (3)$$

Τώρα πάλι από ισχυρισμό 1 για $\gamma = x$, $\delta = b$, επειδή $f(x) \leq f(b)$ έχουμε ότι

$$f(x) = \min_{[x,b]} f \quad \text{και} \quad f(b) = \max_{[x,b]} f$$

Οπότε εφόσον $x < y \leq b$ έχουμε ότι

$$f(x) \leq f(y) \leq f(b) \quad (4)$$

Από (3), (4) έπεται ότι $f(x) \leq f(y)$.

β) Ανάλογα.

Άσκηση 82.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής η οποία έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f όχι 1-1.

Λύση.

Εφόσον x_0 σημείο τοπικού μεγίστου της f , υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) \subseteq (a, b)$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Θέτουμε

$$I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \quad I_1 = (x_0 - \rho, x_0], \quad I_2 = [x_0, x_0 + \rho)$$

και

$$J_1 = f(I_1), \quad J_2 = f(I_2)$$

Εφόσον η f συνεχής, τα I_1, I_2 είναι διαστήματα, έχουμε ότι τα J_1, J_2 είναι διαστήματα (Πόρισμα 6.5.4).

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$f(x_0) \in J_1 \quad (\text{αφού } x_0 \in I_1)$$

και εφόσον

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in I_1 = (x_0 - \rho, x_0]$$

έπεται το $f(x_0)$ δεξί άκρο του J_1 .

Όμοια έχουμε ότι το $f(x_0)$ δεξί άκρο του J_2 .

Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) Το J_1 μονοσύνολο

Τότε εφόσον $f(x_0) \in J_1$, έχουμε ότι $J_1 = \{f(x_0)\}$ κι άρα

$$f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in I_1 = (x_0 - \rho, x_0]$$

Οπότε η f όχι 1-1.

ii) Το J_2 μονοσύνολο

Ανάλογα με την (i), η f όχι 1-1.

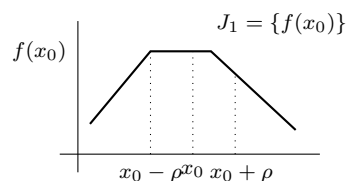
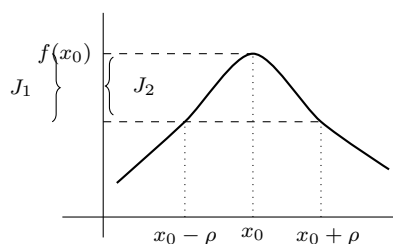
iii) Τα J_1, J_2 όχι μονοσύνολα

Εφόσον τα J_1, J_2 όχι μονοσύνολα, υπάρχουν $y_1 \in J_1, y_2 \in J_2$ με $y_1 < f(x_0)$ και $y_2 < f(x_0)$. Άρα

$$[y_1, f(x_0)] \subseteq J_1 \quad \text{και} \quad [y_2, f(x_0)] \subseteq J_2$$

Έστω $y = \max\{y_1, y_2\}$. Τότε $y \in J_1 \cap J_2$.

Εφόσον $y \in J_1 = f(I_1) = f((x_0 - \rho, x_0])$ και $y \neq f(x_0)$, υπάρχει $x_1 \in (x_0 - \rho, x_0)$ ώστε $y = f(x_1)$.



Όμοια υπάρχει $x_2 \in (x_0, x_0 + \rho)$ ώστε $y = f(x_2)$.

Οπότε $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Άρα η f όχι 1-1.

Άσκηση 83.

Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- 1) $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- 2) f συνεχής

Λύση.

((2) $\Rightarrow$ (1)) Εφόσον η f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ έχουμε ότι υπάρχουν τα $M = \max(f)$ και $m = \min(f)$ και

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Επίσης εφόσον η f αύξουσα είναι σαφές ότι

$$m = f(a), \quad M = f(b)$$

Άρα

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

((1) $\Rightarrow$ (2)) Έστω $x_0 \in [a, b]$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 . Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) $x_0 \in (a, b)$

Από το ??ο λυμένο, εφόσον η f είναι αύξουσα, έχουμε ότι για να δ.ο. η f συνεχής στο x_0 αρκεί να δ.ο.

$$\gamma = \sup\{f(x) : x \in [a, x_0]\} = \inf\{f(x) : x \in (x_0, b]\} = \delta$$

(οπότε, εφόσον $\gamma \leq f(x_0) \leq \delta$, θα έχουμε $\gamma = f(x_0) = \delta$).

Έστω ότι $\gamma < \delta$.

Είναι σαφές ότι

$$f(a) \leq \gamma < \delta \leq f(b)$$

(γιατί?)

Άρα εάν $\lambda \in (\gamma, \delta) \Rightarrow \lambda \in [f(a), f(b)] \xrightarrow{\text{υπόθεση}} \lambda \in f([a, b]) \Rightarrow \text{υπάρχει } x_1 \in [a, b] \text{ ώστε}$

$$f(x_1) = \lambda$$

Έστω $\lambda \in (\gamma, \delta)$ με $\lambda \neq f(x_0)$.

Τότε επειδή

$$\begin{aligned} \gamma < \lambda < \delta &\Rightarrow f(x) < \lambda \text{ για κάθε } x < x_0 \\ &\text{και } \lambda < f(x) \text{ για κάθε } x > x_0 \end{aligned}$$

Άρα εφόσον $\lambda \neq f(x_0)$ έπεται ότι τελικά

$$\lambda \neq f(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

κάτι το οποίο έρχεται σ' αντίφαση με το γεγονός ότι $\lambda \in f([a, b])$.

Άρα $\gamma = \delta$.

ii) $x_0 = a$ ή $x_0 = b$

Ανάλογα με το (i).

