

6. Συνεχείς συναρτήσεις

6.1 Η έννοια της συνέχειας

6.2 Αρχή μεταφοράς

6.3 Πράξεις συνεχών συναρτήσεων

6.4 Τοπικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

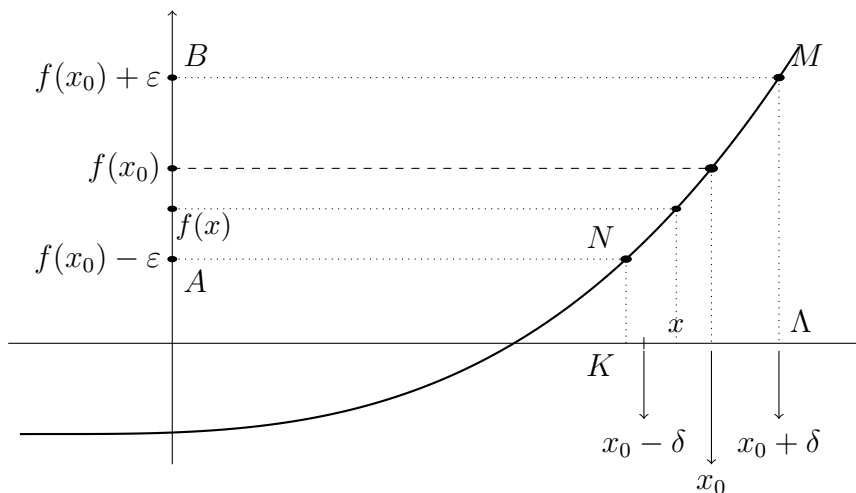
6.5 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

6.6 Λυμένα προβλήματα

6.7 Άλυτα προβλήματα

6.1 Η έννοια της συνέχειας

Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με γεωμετρική παράσταση όπως φαίνεται στο σχήμα, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός.



Θεωρούμε την ε -περιοχή $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ του $f(x_0)$. Έστω τα σημεία $A = f(x_0) - \varepsilon$, $B = f(x_0) + \varepsilon$. Από τα A, B φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τον x' και έστω N, M τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με την γεωμετρική παράσταση της f αντίστοιχα.

Έστω K, Λ οι προβολές των N, M αντίστοιχα, στον άξονα $x'x$. Θέτουμε

$$\delta = \min\{(\text{απόσταση } x_0 \text{ από το } K), (\text{απόσταση } x_0 \text{ από το } \Lambda)\}$$

(Στο συγκεκριμένο σχήμα έχουμε $\delta = \text{απόσταση του } x_0 \text{ από το } \Lambda$.)

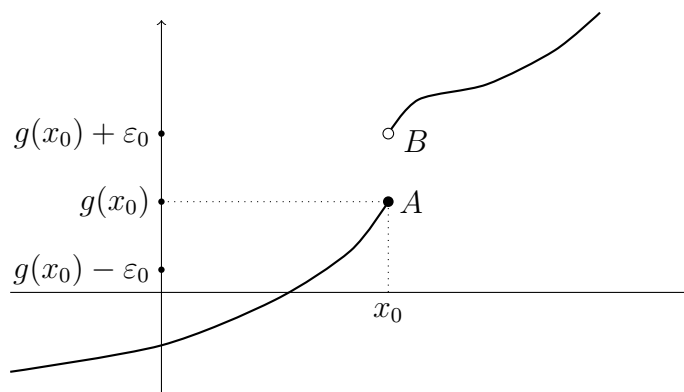
Έστω τώρα η δ -περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0 . Είναι φανερό ότι

$$\text{“εάν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ τότε το } f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)\text{”}$$

Συνεπώς παρατηρήσαμε γεωμετρικά ότι

$$\text{“για οποιοδήποτε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε} \\ \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)\text{”}$$

Ας δούμε τώρα μια περίπτωση όπου δεν ισχύει το παραπάνω. Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με γεωμετρική παράσταση όπως στο ακόλουθο σχήμα



Θέτουμε $\varepsilon_0 =$ την απόσταση των $A, B > 0$.

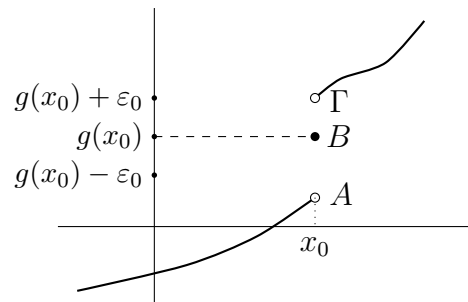
Έστω η ε_0 -περιοχή $(g(x_0) - \varepsilon_0, g(x_0) + \varepsilon_0)$ του $g(x_0)$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε δ -περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0 , εάν πάρουμε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε το $g(x) \notin (g(x_0) - \varepsilon_0, g(x_0) + \varepsilon_0)$.

Άρα για την συγκεκριμένη g , παρατηρήσαμε ότι στο x_0 ισχύει το ακόλουθο

“υπάρχει ένα $\varepsilon_0 > 0$ ώστε
για οποιοδήποτε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
ώστε $g(x) \notin (g(x_0) - \varepsilon_0, g(x_0) + \varepsilon_0)$ ”

– Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν η g ήταν όπως στο σχήμα, παίρνοντας για

$$\varepsilon_0 = \min\{AB, B\Gamma\}$$



Ορισμός 6.1.1. Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** εάν

“για κάθε ε -περιοχή $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ του $f(x_0)$,
υπάρχει δ -περιοχή του x_0 ώστε
για κάθε $x \in X$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ ”

ή με άλλα λόγια, η f συνεχής στο x_0 εάν

“για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ”

Παρατήρηση 6.1.2. Όπως θα δούμε και στα παραδείγματα, το δ συνήθως εξαρτάται από τα ε, x_0 .

Ορισμός 6.1.3. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής**, εάν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Ορισμός 6.1.4. Θα λέμε ότι η f είναι **ασυνεχής στο x_0** εάν δεν είναι συνεχής στο x_0 .

– Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 έχουμε ότι η f ασυνεχής στο x_0 όταν

“υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε,
για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in X$ για το οποίο
 $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ ”

Παραδείγματα 6.1.5

α) Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον ορισμό ?? αρκεί να δ.ο. η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 , δηλαδή θα δ.ο.

“για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ”

Έστω λοιπόν τυχόν $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$, παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

(Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι το δ εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το x_0 .)

β) Η $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Θα δ.ο. η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in [0, +\infty)$. Έστω λοιπόν $x_0 \in [0, +\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) $x_0 > 0$

Για να δ.ο. η f συνεχής στο x_0 , πρέπει να δ.ο.

“για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
για κάθε $x \in [0, +\infty)$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|}_{f(x) - f(x_0)} < \varepsilon$ ”

Παρατηρούμε ότι εάν $x \in [0, +\infty)$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| \quad (1)$$

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$ έχουμε ότι εάν $x \in [0, +\infty)$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \delta = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

(Εδώ παρατηρούμε ότι το δ εξαρτάται και από το x_0 και από το ε .)

ii) $x_0 = 0$

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \varepsilon^2$ έχουμε ότι εάν $x \in [0, +\infty)$ με $|x - 0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο 0.

(Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (1), διότι για $x_0 = 0$ το $\frac{1}{\sqrt{x_0}}$ δεν ορίζεται.)

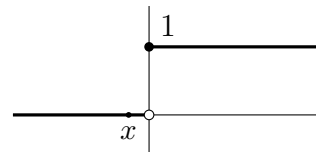
γ) Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x < 0 \\ 1 & \text{εάν } x \geq 0 \end{cases}$$

Δ.ο. η f ασυνεχής στο μηδέν.

Απόδειξη.

Από την γεωμετρική παράσταση της f , παρατηρούμε ότι το μήκος του “άλματος” της f στο μηδέν είναι ίσο με 1.



Θέτουμε $\varepsilon_0 = 1$ και παρατηρούμε ότι εάν $\delta > 0$ και $x \in (-\delta, 0) \subseteq (-\delta, \delta)$, έχουμε ότι

$$|f(x) - f(0)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon_0$$

Οπότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$|x - 0| < \delta \text{ και } |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon_0$$

Άρα η f ασυνεχής στο 0.

δ) Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχείς.

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y| \quad \text{και} \quad |\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y| \leq |x - y| \quad (1)$$

Ας δ.ο. η f συνεχής. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για $\delta = \varepsilon$ παρατηρούμε ότι εάν $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| = |\eta\mu x - \eta\mu x_0| \stackrel{(1)}{\leq} |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 . Ανάλογα η g συνεχής.

6.2 Αρχή μεταφοράς

Θεώρημα 6.2.1. (Αρχή μεταφοράς) Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in X$. Τ.Α.Ε.Ι.

α) f συνεχής στο x_0

β) Για κάθε (x_n) ακολουθία στοιχείων του X με $x_n \rightarrow x_0$, ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Απόδειξη.

((α)⇒(β)) Έστω $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \rightarrow x_0$. Θα δ.ο. $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{εάν } x \in X \text{ με } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

Επειδή $x_n \rightarrow x_0$, για το $\delta > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0 \text{ ισχύει } |x_n - x_0| < \delta \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι εάν $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$\text{εάν } n \geq n_0 \xRightarrow{(2)} |x_n - x_0| < \delta \xRightarrow{(1)} |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.
Συνεπώς $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

((β)⇒(α)) Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f όχι συνεχής στο x_0 . Τότε

$$\begin{aligned} &\text{“υπάρχει } \varepsilon_0 > 0 \text{ ώστε,} \\ &\quad \text{για κάθε } \delta > 0, \text{ υπάρχει } x \in X \text{ για το οποίο} \\ &\quad |x - x_0| < \delta \text{ και } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0\text{”} \end{aligned} \quad (3)$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in X : |x - x_0| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0\}$$

Από (3) έχουμε ότι $A_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[Πράγματι εάν $n \in \mathbb{N}$, τότε από (3) για $\delta = 1/n$, έχουμε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$|x - x_0| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Άρα $x \in A_n$ και συνεπώς $A_n \neq \emptyset$.]

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ένα $x_n \in A_n$. Για την ακολουθία (x_n) έχουμε ότι

- i) $x_n \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
- ii) $|x_n - x_0| < 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

και

- iii) $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Από (ii) έχουμε ότι $x_n \rightarrow x_0$ κι άρα εφόσον (x_n) ακολουθία στοιχείων του X (από (i)), έπεται από την υπόθεση ότι $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Άτοπο διότι από (iii) έχουμε ότι $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6.2.2 Μια εφαρμογή της Α.Μ. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Κατ’ αρχάς μια $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **πολυωνυμική συνάρτηση** εάν υπάρχουν $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ας δ.ο. η f συνεχής. Αρκεί να δ.ο. η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για να δ.ο. η f συνεχής στο x_0 , σύμφωνα με ((β)⇒(α)) του 6.2.1, αρκεί να δ.ο.

$$\text{“για κάθε } (x_n) \subseteq \mathbb{R} \text{ με } x_n \rightarrow x_0, \text{ ισχύει } f(x_n) \rightarrow f(x_0)\text{”}$$

Έστω λοιπόν $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow x_0$. Τότε από πράξεις ορίων έχουμε

$$\text{i)} \quad a_k x_n^k \xrightarrow{n} a_k x_0^k \text{ για κάθε } k = 0, 1, \dots, m$$

και

$$\text{ii)} \quad a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_m x_n^m \xrightarrow{n} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_m x_0^m$$

δηλ. $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. ■

– Σκοπός μας τώρα είναι να δ.ο. η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο

Πρόταση 6.2.3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

“για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εάν $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ με $q_n \rightarrow x$, ισχύει ότι $f(q_n) \rightarrow f(x)$ ”

Τότε η f συνεχής.

Απόδειξη.

Για να δ.ο. η f συνεχής αρκεί να δ.ο. ότι είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν $x_0 \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το $((\beta) \Rightarrow (\alpha))$ της Α.Μ., για να δ.ο. η f συνεχής στο x_0 , αρκεί να δ.ο.

“εάν $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow x_0$, τότε $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ”

Έστω λοιπόν $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow x_0$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Ισχυρισμός 1

“για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $p_n \in \mathbb{Q}$ ώστε $|p_n - x_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(p_n)| < \frac{1}{n}$ ”

[Πράγματι έστω $n \in \mathbb{N}$ σταθερό. Όπως στο λυμένο πρόβλημα 60 στο κεφάλαιο 3, έχουμε ότι υπάρχει (q_m) ακολουθία ρητών ώστε $q_m \xrightarrow{m} x_n$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(q_m) \xrightarrow{m} f(x_n)$.

Επειδή $q_m \xrightarrow{m} x_n$, $f(q_m) \xrightarrow{m} f(x_n)$, για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, έχουμε ότι υπάρχουν $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{εάν } m \geq m_1 \Rightarrow |q_m - x_n| < \frac{1}{n}$$

και

$$\text{εάν } m \geq m_2 \Rightarrow |f(q_m) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$$

Θέτοντας $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$, έχουμε ότι

$$|q_{m_0} - x_n| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(q_{m_0}) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$$

Οπότε για $p_n = q_{m_0}$ έχουμε $p_n \in \mathbb{Q}$ και

$$|p_n - x_n| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(p_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$$

Από τον ισχυρισμό έχουμε ότι υπάρχει (p_n) ακολουθία ρητών ώστε

$$|p_n - x_n| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(p_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $p_n \rightarrow x_0$.

[Πράγματι εάν $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$|p_n - x_0| \leq |p_n - x_n| + |x_n - x_0| < \frac{1}{n} + |x_n - x_0|$$

και εφόσον $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $|x_n - x_0| \rightarrow 0$ (αφού $x_n \rightarrow x_0$), έπεται ότι $|p_n - x_0| \rightarrow 0 \Rightarrow p_n \rightarrow x_0$.]

Τώρα εφόσον (p_n) ακολουθία ρητών ώστε $p_n \rightarrow x_0$, από την υπόθεση έχουμε ότι $f(p_n) \rightarrow f(x_0)$.

Τέλος παρατηρούμε ότι εάν $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq |f(x_n) - f(p_n)| + |f(p_n) - f(x_0)| \stackrel{(1)}{<} \frac{1}{n} + |f(p_n) - f(x_0)|$$

κι άρα εφόσον $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $|f(p_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$ (αφού $f(p_n) \rightarrow f(x_0)$), έπεται ότι

$$|f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Πρόταση 6.2.4. Εάν $a > 0$ με $a \neq 1$ τότε η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Χρησιμοποίησε την Πρόταση 6.2.3: αρκεί να δείξεις ότι εάν (q_n) ακολουθία ρητών με $q_n \rightarrow x$ τότε $a^{q_n} \rightarrow a^x$, κάτι που προκύπτει από τον ορισμό της a^x για άρρητο x (κεφ. 3).

6.2.5 Σημαντικά παραδείγματα

α) Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{εάν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\text{συνάρτηση Dirichlet})$$

Αποδείξτε ότι η f ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. η f ασυνεχής στο x_0 .

α' τρόπος

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Τότε για $\varepsilon = 1/2$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < 1/2, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

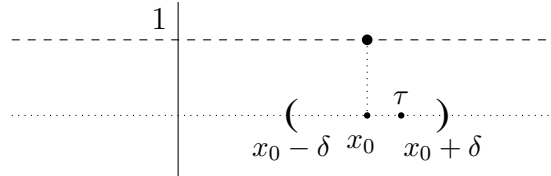
i) $x_0 \in \mathbb{Q}$. Τότε $f(x_0) = 1$ κι άρα η (1) γίνεται

$$|f(x) - 1| < 1/2, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (2)$$

Από πυκνότητα αρρήτων, υπάρχει $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $\tau \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Οπότε από (2)

$$|f(\tau) - 1| < 1/2 \xrightarrow[\text{αφού } \tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]{f(\tau)=0} |0 - 1| < 1/2 \Rightarrow 1 < 1/2$$

Άτοπο



ii) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε $f(x_0) = 0$ κι άρα η (1) γίνεται

$$|f(x) - 0| < 1/2, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (3)$$

Από πυκνότητα ρητών, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $q \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Συνεπώς από (3)

$$|f(q) - 0| < 1/2 \Rightarrow |1 - 0| < 1/2 \Rightarrow 1 < 1/2$$

Άτοπο

Άρα σε κάθε περίπτωση καταλήξαμε σ' άτοπο και συνεπώς η f ασυνεχής στο x_0 .

β' τρόπος

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Τότε για $\varepsilon = 1/2$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < 1/2, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (4)$$

Από πυκνότητα ρητών και αρρήτων, υπάρχουν $q \in \mathbb{Q}$ και $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $q, \tau \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Οπότε από (4) έχουμε

$$|f(q) - f(x_0)| < 1/2 \text{ και } |f(\tau) - f(x_0)| < 1/2$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |f(q) - f(\tau)| &= |f(q) - f(x_0) + f(x_0) - f(\tau)| \leq \\ &\leq |f(q) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(\tau)| \stackrel{(4)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Άρα $1 = |1 - 0| = |f(q) - f(\tau)| < 1$. Άτοπο

γ' τρόπος (με χρήση της Α.Μ.)

Προς άτοπο έστω ότι η f συνεχής στο x_0 .

Όπως στα λυμένα προβλήματα 60, 63 του κεφ. 3, υπάρχουν (q_n) ακολουθία ρητών και (τ_n) ακολουθία αρρήτων ώστε $q_n \rightarrow x_0$ και $\tau_n \rightarrow x_0$.

Εφόσον f συνεχής στο x_0 , από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(q_n) \rightarrow f(x_0) \text{ και } f(\tau_n) \rightarrow f(x_0)$$

Επειδή $q_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(q_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(q_n) \rightarrow 1$.

Άρα αφού $f(q_n) \rightarrow f(x_0)$ και $f(q_n) \rightarrow 1$, από την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας έπεται ότι $f(x_0) = 1$.

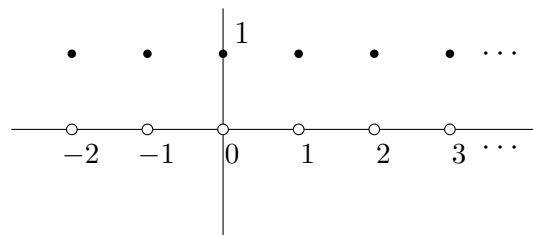
Ανάλογα $f(x_0) = 0$. Προφανώς άτοπο.

β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Τότε

i) f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

ii) f ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{Z}$

Λύση.

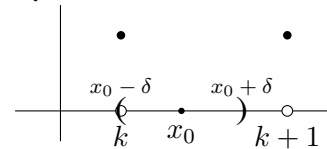


i) Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο x_0 .

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x_0 \notin \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $x_0 \neq [x_0]$ κι άρα $[x_0] < x_0 < [x_0] + 1$.

Θέτουμε $k = [x_0]$. Για $\delta = \min\{x_0 - k, k + 1 - x_0\}$ έχουμε ότι

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (k, k + 1)$$



Τότε εάν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow x \in (k, k + 1) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$

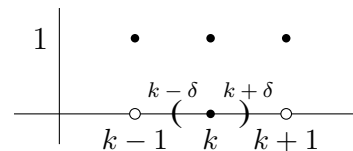
$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Οπότε η f συνεχής στο x_0 .

ii) $x_0 = k \in \mathbb{Z}$



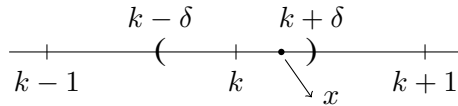
Θα δ.ο. η f ασυνεχής στο k .

α' τρόπος

Προς άτοπο έστω ότι η f συνεχής στο k . Τότε για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(k)| = |f(x) - 1| < 1 \quad \forall x \in (k - \delta, k + \delta) \quad (1)$$

Έστω $x \in (k - \delta, k + \delta)$ ώστε $x \notin \mathbb{Z}$ (π.χ. $x = k + \frac{1}{2} \min\{\delta, 1\}$).



Από (1) έχουμε ότι

$$|f(x) - 1| < 1 \xrightarrow{f(x)=0} |0 - 1| < 1 \Rightarrow 1 < 1.$$

Άτοπο

β' τρόπος

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f συνεχής στο k .

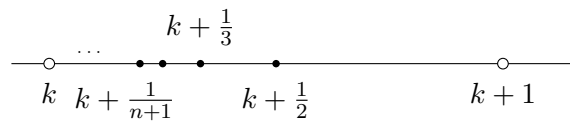
Έστω (x_n) η ακολουθία με $x_n = k + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $x_n \in (k, k+1) \Rightarrow f(x_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0$.

Επίσης επειδή $x_n \rightarrow k$ και η f συνεχής στο k , από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ. έχουμε ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(k) = 1$$

Άρα $f(x_n) \rightarrow 0$ και $f(x_n) \rightarrow 1$. Άτοπο από την μοναδικότητα ορίου ακολουθίας.



γ) Κάθε $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Λύση.

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Θα δ.ο. η f συνεχής στο n_0 .

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν θετικός αριθμός. Για $\delta = 1$ παρατηρούμε ότι

$$\text{εάν } n \in \mathbb{N} \text{ με } |n - n_0| < \delta = 1 \Rightarrow n = n_0 \Rightarrow |f(n) - f(n_0)| = 0 < \varepsilon$$

Οπότε η f συνεχής στο n_0 .

6.3 Πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Πρόταση 6.3.1. Έστω $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και $x_0 \in X$ ώστε οι f, g συνεχείς στο x_0 . Τότε

α) Η $f + g$ είναι συνεχής στο x_0

β) Η λf συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) Η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0

δ) Εάν $g(x_0) \neq 0$ και $Y = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ τότε η $\frac{f}{g} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0

ε) Η $|f|$ είναι συνεχής στο x_0

Απόδειξη.

Σύμφωνα με το $((\beta) \Rightarrow (\alpha))$ της Α.Μ., για να δ.ο. μια $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 με χρήση ακολουθιών πρέπει και αρκεί να δ.ο.

“για κάθε $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \rightarrow x_0$, ισχύει $h(x_n) \rightarrow h(x_0)$ ”

α) Θέτουμε $h = f + g$. Ας δείξουμε με Α.Μ. ότι η h συνεχής στο x_0 .

Έστω (x_n) τυχούσα ακολουθία στοιχείων του X η οποία συγκλίνει στο x_0 . Θα δ.ο. $h(x_n) \rightarrow h(x_0)$.

Εφόσον f, g συνεχείς στο x_0 και $x_n \rightarrow x_0$, από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ., έχουμε ότι

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ και } g(x_n) \rightarrow g(x_0)$$

Οπότε από πράξεις ορίων ακολουθιών, έχουμε ότι

$$h(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

(β)–(ε) Ανάλογα με το (α).

Παρατηρήσεις 6.3.2

α) Εάν η $f + g$ συνεχής στο x_0 , δεν ισχύει πάντα ότι μια τουλάχιστον από τις f, g είναι συνεχής στο x_0 .

Για παράδειγμα έστω οι $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Όπως στο παράδειγμα ?? α) έχουμε ότι οι f, g ασυνεχείς σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η $f + g$ όμως είναι συνεχής εφόσον είναι σταθερή συνάρτηση και συγκεκριμένα

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Εάν η $f \cdot g$ συνεχής στο x_0 , δεν ισχύει πάντα ότι μια τουλάχιστον από τις f, g είναι συνεχής στο x_0 . Για παράδειγμα έστω οι $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad g = f$$

Τότε οι f, g πουθενά συνεχείς ενώ

$$(f \cdot g)(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

κι άρα η $f \cdot g$ συνεχής.

γ) Σ ή Λ?

Αν η $|f|$ συνεχής στο x_0 τότε η f συνεχής στο x_0 .

Υπόδ. Λάθος. Πάρε $f(x) = 1$ για $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -1$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. τότε $|f| = 1$.

Πρόταση 6.3.3. Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο τιμών $f(X)$ της f , είναι υποσύνολο του Y κι άρα ορίζεται η $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν $x_0 \in X$ τ.ω. η f συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η $g \circ f$ συνεχής στο x_0 .

Απόδειξη.

Σύμφωνα με το $((\beta) \Rightarrow (\alpha))$ της Α.Μ. αρκεί να δ.ο.

“για κάθε $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \rightarrow x_0$, ισχύει $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$ ”

Έστω λοιπόν $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \rightarrow x_0$.

Επειδή f συνεχής στο x_0 , από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ. έπεται ότι $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Τώρα επειδή $(f(x_n)) \subseteq Y$ (αφού $f(X) \subseteq Y$), $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ και η g συνεχής στο $f(x_0)$, πάλι από το $((\alpha) \Rightarrow (\beta))$ της Α.Μ., έπεται ότι

$$g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$$

κι άρα $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$.

6.3.4 Άσκηση

Δώστε παράδειγμα $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τ.ω.

i) f, g πουθενά συνεχείς

ii) η $g \circ f$ συνεχής

(Υπόδ. Πάρτε $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $g = f$.)

6.4 Τοπικές ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Ορισμός 6.4.1. α) Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $A \subseteq X$. Θα λέμε ότι η f είναι **φραγμένη στο A** εάν το σύνολο τιμών της f στο A , δηλ. το $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, είναι φραγμένο.

Ισοδύναμα η f φραγμένη στο A εάν υπάρχει $M > 0$ ώστε

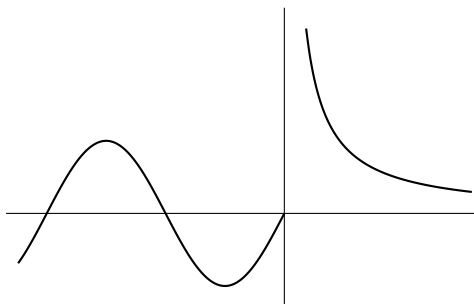
$$|f(x)| \leq M, \text{ για κάθε } x \in A$$

– Για παράδειγμα η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

είναι φραγμένη στο $(-\infty, 0]$ εφόσον

$$|f(x)| = |\eta\mu x| \leq 1, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0]$$



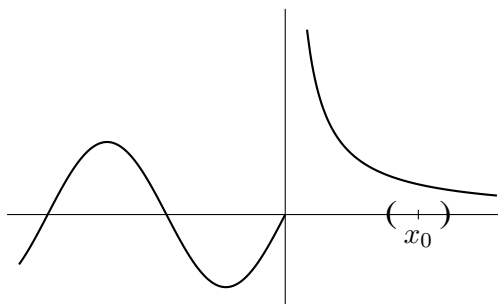
Επίσης η f φραγμένη στο $[1, +\infty)$ διότι εάν $x \in [1, +\infty)$ τότε

$$0 < f(x) = \frac{1}{x} \leq 1$$

Η f δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1]$ (γιατί?)

β) Εάν $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, θα λέμε ότι η f **τοπικά φραγμένη στο x_0** εάν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f φραγμένη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

Για παράδειγμα η f στο προηγούμενο παράδειγμα είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε $x_0 \neq 0$

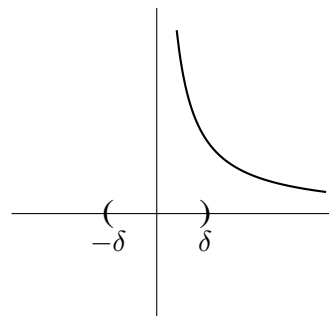


Η f όμως όχι τοπικά φραγμένη στο $x_0 = 0$ διότι για κάθε $\delta > 0$ η f όχι φραγμένη στο $(-\delta, \delta)$, εφόσον εάν $x_n = \frac{1}{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$ όπου $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \delta$, τότε $x_n \in (-\delta, \delta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^{(*)}$ και

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = n + k \rightarrow +\infty$$

(*) Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$n + k > k \Rightarrow \frac{1}{n+k} < \frac{1}{k} < \delta$$



Πρόταση 6.4.2. Εάν $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in X$, τότε η f τοπικά φραγμένη στο x_0 .

Απόδειξη.

Εφόσον η f συνεχής στο x_0 , για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < 1, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$$

Άρα εάν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \xrightarrow{||a|-|b|| \leq |a-b|} |f(x)| - |f(x_0)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(x_0)|$$

Οπότε για $M = |f(x_0)| + 1$ έχουμε ότι

$$|f(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$$

Πρόταση 6.4.3. Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ ώστε η f είναι συνεχής στο x_0 . Τότε

1) Εάν $f(x_0) > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$$

2) Εάν $f(x_0) < 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$$

3) Εάν $f(x_0) \neq 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$$

Απόδειξη.

1) Για $\varepsilon = \underbrace{f(x_0)}_{\text{από υπόθεση}} > 0$, εφόσον η f συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{“εάν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \xrightarrow{f(x_0)=\varepsilon} 0 < f(x)”$$

2) Για $\varepsilon = \underbrace{-f(x_0)}_{\text{από υπόθ.}} > 0$, εφόσον η f συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{“εάν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \xrightarrow{f(x_0)+\varepsilon=0} f(x) < 0”$$

3) Άμεσο από τα (1), (2).

Άσκηση

Εάν $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in X$ και $f(x_0) > 0$, δείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$, $k > 0$ ώστε

$$f(x) > k \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$$

(Υπόδ. Πάρτε $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$.)

Υπενθύμιση 6.4.4. Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $Y \subseteq X$. Ορίζουμε τον περιορισμό της f στο Y , να είναι η συνάρτηση

$$g : Y \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = f(x), x \in Y$$

- Η g συμβ. με $f|_Y$.
- Για παράδειγμα εάν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ -x^2+2, & x \leq 0 \end{cases}$$

τότε ο περιορισμός της f στο $(0, +\infty)$, είναι η $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) = x+1, x > 0$$

Παρατηρήσεις 6.4.5

α) Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 1 \\ 0 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ και $g = f|_{[1, +\infty)}$. Τότε

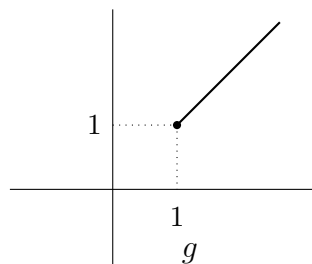
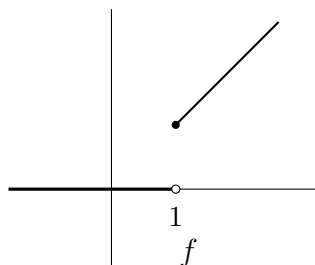
i) Η f ασυνεχής στο 1 (εύκολο)

ii) Η g συνεχής στο 1

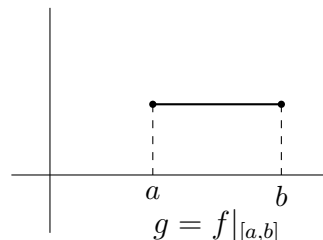
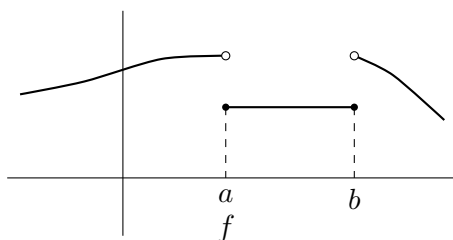
[Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon$. Τότε

$$\text{εάν } \underbrace{x \in [1, +\infty)}_{\text{πεδίο ορισμού της } g} \text{ με } |x-1| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(1)| = |x-1| < \delta = \varepsilon]$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ενώ η f ασυνεχής στο 1, ο περιορισμός της στο $[1, +\infty)$ είναι συνεχής στο 1.



β) Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ του σχήματος είναι ασυνεχής στο a, b ενώ η $g = f|_{[a, b]}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$



Πρόταση 6.4.6. Έστω $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Y \subseteq X$, $x_0 \in Y$ και $g = f|_Y$.

α) Αν η f συνεχής στο x_0 τότε και ο περιορισμός της στο Y , δηλ. η g , είναι συνεχής στο x_0

β) Αν το Y είναι ανοικτό διάστημα ή ένωση ανοικτών διαστημάτων και η g συνεχής στο x_0 , τότε και η f συνεχής στο x_0

Άμεσα από τα (α), (β) είναι τα ακόλουθα

α₁) Αν η f συνεχής τότε και η $g = f|_Y$ συνεχής

β₁) Αν το Y ανοικτό διάστημα ή ένωση ανοικτών διαστημάτων και η $g = f|_Y$ συνεχής, τότε η f συνεχής σε κάθε $x \in Y$

Απόδειξη.

α) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$. Τότε εάν $x \in Y$ με $|x - x_0| < \delta$, επειδή $Y \subseteq X$, έχουμε

$$|g(x) - g(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα η g συνεχής στο x_0 .

β) Το x_0 ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα $(c, d) \subseteq Y$ (όπου c μπορεί να είναι $-\infty$ και d μπορεί να είναι $+\infty$). Άρα υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) \subseteq (c, d) \subseteq Y$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η g συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in Y$ με $|x - x_0| < \delta_1$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \rho\}$. Εάν $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \subseteq Y$ και άρα

$$|f(x) - f(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

Άρα η f συνεχής στο x_0 .

(Στο (β) η υπόθεση ότι το Y είναι ανοικτό διάστημα ή ένωση ανοικτών διαστημάτων χρησιμοποιήθηκε ακριβώς για να βρούμε το $\rho > 0$. Στις Παρατηρήσεις ?? α), όπου $Y = [1, +\infty)$ και $x_0 = 1$, τέτοιο ρ δεν υπάρχει.)

Παρατήρηση 6.4.7. Όπως είδαμε στις Παρατηρήσεις ?? το αντίστροφο του (α) της ??, εν γένει δεν ισχύει.

— Ένα επίσης ενδιαφέρον αντιπαράδειγμα είναι η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Η f ως γνωστό πουθενά συνεχής. Η $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ όμως με $g = f|_{\mathbb{Q}}$ είναι συνεχής εφόσον είναι σταθερή συνάρτηση, διότι

$$g(x) = f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{Q}$$

Παραδείγματα 6.4.8

α) Δ.ο. η $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x + 1, x \geq 0$ είναι συνεχής

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι $g = f|_{[0, +\infty)}$ όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Εφόσον f συνεχής (ως πολυωνυμική) έπεται από ?? (α₁) ότι η g συνεχής.

β) Να εξετασθεί ως προς την συνέχεια η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Λύση.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η f συνεχής σε κάθε $x \in (0, +\infty)$.

[Πράγματι έστω $g = f|_{(0, +\infty)}$. Τότε $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x + 1$, $x \in (0, +\infty)$.

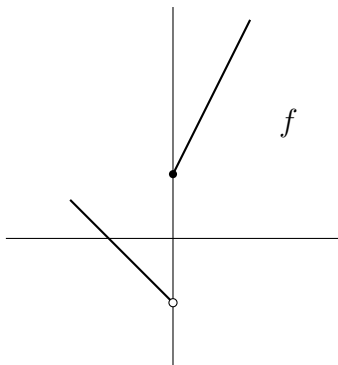
Όπως στο παράδειγμα (α) έχουμε ότι η g συνεχής.

Τώρα εφόσον g συνεχής, $g = f|_{(0, +\infty)}$ και το $(0, +\infty)$ ανοικτό διάστημα, από το ??

(β₁) έχουμε ότι η f συνεχής σε κάθε $x \in (0, +\infty)$.]

Ανάλογα έχουμε ότι η f συνεχής σε κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Μένει να ελέγξουμε την συνέχεια της f στο 0.



Η f ασυνεχής στο 0. Πράγματι εάν προς άτοπο υποθέσουμε ότι η f συνεχής στο 0, τότε επειδή η $x_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$, από την Α.Μ. έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(0) = 1$.

Άτοπο διότι $f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = -(-\frac{1}{n}) - 1 \rightarrow -1$.

6.5 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 6.5.1. (Θεώρημα Bolzano) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$f(a) \leq 0 \leq f(b)$$

Τότε υπάρχει $p \in [a, b]$ ώστε $f(p) = 0$.

Απόδειξη.

Αν $f(a) = 0$ (αντ. $f(b) = 0$) τότε για $p = a$ (αντ. $p = b$) έχουμε το επιθυμητό.

Έστω λοιπόν ότι $f(a) < 0 < f(b)$. Θέτουμε

$$A = \{x \in [a, b] : f(y) < 0 \text{ για κάθε } y \in [a, x]\}$$

Παρατηρούμε ότι

i) $A \neq \emptyset$ (αφού $a \in A$)

ii) A φραγμένο (αφού $A \subseteq [a, b]$)

Έστω $p = \sup A$. Προφανώς $a \leq p \leq b$.

Παρατηρούμε ότι

α) $f(p) \geq 0$

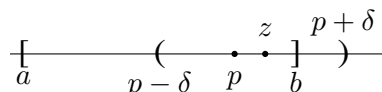
Πράγματι έστω ότι $f(p) < 0$. Αφού η f συνεχής από την πρόταση ??, έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{“εάν } x \in (p - \delta, p + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) < 0\text{”} \quad (1)$$

Είναι σαφές επίσης ότι $p \neq b$ (αφού $f(b) > 0$) και άρα έχουμε ότι $p < b$.

Έστω $z \in (p, p + \delta) \cap [a, b]$.

Παρατηρούμε ότι $z \in A$.



[Πράγματι έστω $y \in [a, z]$.

Εάν $y < p \xrightarrow{p=\sup A}$ υπάρχει $x \in A$ με $y < x \leq p \xrightarrow{x \in A} f(y) < 0$

ενώ εάν $y \geq p \xrightarrow{y \leq z} y \in [p, p + \delta) \cap [a, b] \xrightarrow{(1)} f(y) < 0$.

Άρα $f(y) < 0$ για κάθε $y \in [a, z] \Rightarrow z \in A$.]

Εφόσον λοιπόν $z \in A$, $p = \sup A \Rightarrow z \leq p$.

Άτοπο εφόσον $z > p$. Άρα $f(p) \geq 0$.

β) $f(p) \leq 0$

Πράγματι έστω ότι $f(p) > 0$. Επειδή η f συνεχής από την πρόταση ?? έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{“εάν } x \in (p - \delta, p + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) > 0\text{”} \quad (2)$$

Είναι σαφές επίσης ότι $p \neq a$ (αφού $f(a) < 0$) και άρα έχουμε ότι $p > a$.

Οπότε υπάρχει $z \in (p - \delta, p) \cap [a, b]$.

Γι' αυτό το z από (2) έχουμε ότι $f(z) > 0$.

Άρα $p \leq z$ (γιατί?). Άτοπο εφόσον $z < p$.

Άρα $f(p) \leq 0$.

Από (α), (β) έχουμε ότι $f(p) = 0$.

Παρατήρηση

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος Bolzano ισχύει και όταν $f(a) \geq 0 \geq f(b)$: εφαρμόζουμε το θεώρημα για την συνεχή συνάρτηση $-f$, για την οποία $(-f)(a) \leq 0 \leq (-f)(b)$. Επομένως, εάν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $f(a)f(b) \leq 0$, τότε υπάρχει $p \in [a, b]$ ώστε $f(p) = 0$. Στα λυμένα προβλήματα θα χρησιμοποιούμε το θεώρημα και σε αυτή τη μορφή.

Πριν συνεχίσουμε χρειαζόμαστε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 6.5.2. Ένα $I \subseteq \mathbb{R}$ θα καλείται **διάστημα** εάν

$$\text{“για κάθε } a, b \in I, \text{ εάν } x \text{ είναι μεταξύ των } a, b \text{ τότε } x \in I\text{”}$$

Θεώρημα 6.5.3. (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Θ.Ε.Τ.)) Έστω $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση όπου I διάστημα. Τότε

“οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ δύο τιμών της f , είναι τιμή της f ”

δηλ.

“για κάθε $x_1, x_2 \in I$, εάν y_0 αριθμός μεταξύ των $f(x_1), f(x_2)$ τότε ο y_0 είναι τιμή της f και συγκεκριμένα υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2 ώστε $f(x_0) = y_0$.”

Απόδειξη.

Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 \leq x_2$ και έστω y_0 μεταξύ των $f(x_1), f(x_2)$.

Έστω ότι

$$f(x_1) \leq y_0 \leq f(x_2) \quad (1)$$

Εφόσον το I διάστημα $\Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq I$.

Θεωρούμε την

$$h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = f(x) - y_0, x \in [x_1, x_2]$$

Η h είναι συνεχής (γιατί?) και

$$h(x_1) = f(x_1) - y_0 \stackrel{(1)}{\leq} 0 \leq f(x_2) - y_0 = h(x_2)$$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [x_1, x_2]$ ώστε

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$$

Ανάλογα εάν $f(x_1) \geq y_0 \geq f(x_2)$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Bolzano για την $-h$.

Πόρισμα 6.5.4. Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα. Τότε το $f(I)$ είναι διάστημα.

Απόδειξη.

Για να δ.ο. το $f(I)$ είναι διάστημα αρκεί σύμφωνα με τον ορισμό ?? να δ.ο.

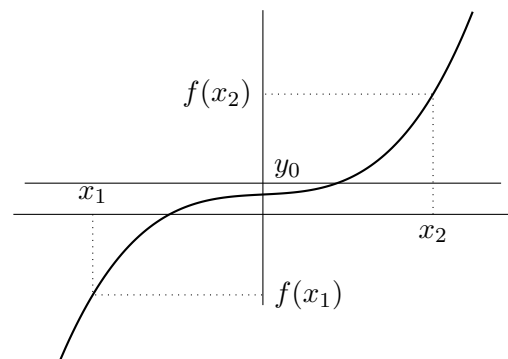
“για κάθε $y_1, y_2 \in f(I)$, εάν y_0 μεταξύ των y_1, y_2 τότε $y_0 \in f(I)$ ”

κάτι το οποίο είναι άμεσο από το Θ.Ε.Τ.

6.5.5 Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Ε.Τ.

Έστω I διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Έστω $x_1, x_2 \in I$ και έστω y_0 μεταξύ των $f(x_1), f(x_2)$.



Παρατηρούμε ότι εάν φέρουμε την ευθεία $y = y_0$ τότε αυτή τέμνει την γεωμετρική παράσταση της f , το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = y_0$.

Πρόταση 6.5.6. Έστω I διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα

1) Για κάθε $a, b, \gamma \in I$ με $a < b < \gamma$ ισχύει ότι

$$\text{είτε } f(a) < f(b) < f(\gamma)$$

$$\text{είτε } f(a) > f(b) > f(\gamma)$$

[Πράγματι έστω $a, b, \gamma \in I$ με $a < b < \gamma$. Έστω ότι δεν ισχύει το παραπάνω. Τότε

$$\text{είτε } f(b) < f(a) < f(\gamma) \quad (1)$$

$$\text{είτε } f(b) < f(\gamma) < f(a) \quad (2)$$

$$\text{είτε } f(a) < f(\gamma) < f(b) \quad (3)$$

$$\text{είτε } f(\gamma) < f(a) < f(b) \quad (4)$$

(αποκλείεται να έχουμε ισότητες εφόσον η f είναι 1-1)

Ας υποθέσουμε ότι $f(b) < f(a) < f(\gamma)$.

Εφαρμόζοντας το Θ.Ε.Τ. για την f στο $[b, \gamma]$ έχουμε ότι επειδή το $f(a)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(b)$, $f(\gamma)$, υπάρχει $p \in (b, \gamma)$ ώστε

$$f(p) = f(a)$$

Άτοπο διότι $p \in (b, \gamma)$ και άρα $p \neq a \xrightarrow{1-1} f(p) \neq f(a)$.

Ανάλογα καταλήγουμε σε άτοπο εάν υποθέσουμε ότι ισχύει κάποια από τις (2)–(4).]

2) Για κάθε $a, b, \gamma, \delta \in I$ με $a < b < \gamma < \delta$ ισχύει ότι

$$\text{είτε } f(a) < f(b) < f(\gamma) < f(\delta)$$

$$\text{είτε } f(a) > f(b) > f(\gamma) > f(\delta)$$

[Από το προηγούμενο έχουμε ότι επειδή $a < b < \gamma$ τότε

$$\text{είτε } f(a) < f(b) < f(\gamma) \text{ είτε } f(a) > f(b) > f(\gamma)$$

Έστω ότι

$$f(a) < f(b) < f(\gamma) \quad (5)$$

Επίσης πάλι από το προηγούμενο επειδή $b < \gamma < \delta$ έχουμε ότι

$$\text{είτε } f(b) < f(\gamma) < f(\delta) \text{ είτε } f(b) > f(\gamma) > f(\delta)$$

Οπότε επειδή $f(b) < f(\gamma)$ έχουμε ότι

$$f(b) < f(\gamma) < f(\delta) \quad (6)$$

Από (5), (6) $\Rightarrow f(a) < f(b) < f(\gamma) < f(\delta)$.]

3) Έστω $a, b \in I$ με $a < b$. Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) $f(a) < f(b)$

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Πράγματι έστω $x, y \in I$ με $x < y$. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις

α) $x = a, y = b$.

Τότε $f(x) = f(a) < f(b) = f(y)$

β) $x = a, y \neq b$. Τότε

εάν $a < b < y$ από το πρώτο βήμα έχουμε ότι

είτε $f(a) < f(b) < f(y)$ είτε $f(a) > f(b) > f(y)$

Οπότε εφόσον $f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(b) < f(y) \xrightarrow{x=a} f(x) < f(y)$

εάν $a < y < b$ ανάλογα με πριν έχουμε ότι $f(x) < f(y)$

γ) $x \neq a, y = b$

Όπως και στην περίπτωση (β)

δ) $x \neq a, y \neq b$

Τότε συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα

$$x < y < a < b \quad (7)$$

$$a < x < y < b \quad (8)$$

$$a < b < x < y \quad (9)$$

$$a < x < b < y \quad (10)$$

$$x < a < y < b \quad (11)$$

$$x < a < b < y \quad (12)$$

(ή $x = b$ ή $y = a$, οπότε τα x, y, a, b είναι τρία διαφορετικά σημεία και εφαρμόζουμε το πρώτο βήμα)

Έστω ότι $x < y < a < b$. Τότε από το δεύτερο βήμα έχουμε ότι

είτε $f(x) < f(y) < f(a) < f(b)$

είτε $f(x) > f(y) > f(a) > f(b)$

Άρα εφόσον $f(a) < f(b)$ έπεται ότι

$$f(x) < f(y) < f(a) < f(b) \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Ανάλογα και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

ii) $f(a) > f(b)$

Τότε ανάλογα με την περίπτωση (i) δείχνουμε ότι η f γνησίως φθίνουσα.

Θεώρημα 6.5.7. Έστω I διάστημα, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Τότε η f^{-1} είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Καταρχάς παρατηρούμε ότι εφόσον η f συνεχής και το I διάστημα, από το Θ.Ε.Τ. έπεται ότι το σύνολο τιμών της f , $J = f(I)$, είναι διάστημα.

Επίσης από την προηγούμενη πρόταση η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα (ανάλογα εργαζόμαστε εάν είναι γνησίως φθίνουσα). Τότε και η $f^{-1} : J \rightarrow I$ είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $y_0 \in J$. Θ.δ.ο. η f^{-1} συνεχής στο y_0 .

Διακρίνουμε περιπτώσεις

1) Το y_0 είναι εσωτερικό σημείο του J

(δηλ. δεν είναι άκρο του J)

Έστω $x_0 = f^{-1}(y_0)$ ($\Leftrightarrow f(x_0) = y_0$). Τότε καταρχάς παρατηρούμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του I .

[Πράγματι έστω ότι το x_0 είναι αριστερό άκρο του I .

Έστω $y_1 \in J$ με $y_1 < y_0$ (υπάρχει εφόσον το y_0 εσωτερικό του J) και έστω $x_1 = f^{-1}(y_1)$.

Επειδή $y_1 < y_0 \Rightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_0) = x_0$.

Προφανώς άτοπο. Ανάλογα καταλήγουμε σ' άτοπο εάν υποθέσουμε ότι το x_0 δεξί άκρο του I .]

Έστω $\varepsilon > 0$.

Θεωρούμε σημεία $a, b \in I$ με

$$x_0 - \varepsilon < a < x_0 < b < x_0 + \varepsilon$$

(υπάρχουν εφόσον το x_0 εσωτερικό σημείο του I)

Έστω $\delta > 0$ ώστε

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq (f(a), f(b))$$

(Υπάρχει τέτοιο $\delta > 0$ εφόσον

$$a < x_0 < b \xrightarrow[\text{αύξουσα}]{f \text{ γν.}} f(a) < f(x_0) < f(b)$$

Έστω $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.

Τότε εφόσον $f(a) < y < f(b) \xrightarrow[\text{αύξουσα}]{f^{-1} \text{ γν.}}$

$$\begin{aligned} a < f^{-1}(y) < b &\Rightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \\ &\Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon \end{aligned}$$

Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ δείξαμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

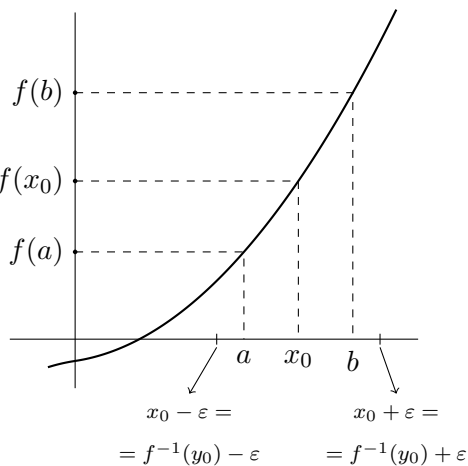
$$\text{εάν } y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Οπότε η f^{-1} συνεχής στο y_0 .

2) Το y_0 είναι κάποιο άκρο του J (εφόσον βέβαια το J έχει κάποιο άκρο)

Ανάλογα και αφήνεται ως άσκηση.

Υπόδ. Εάν το y_0 είναι το αριστερό άκρο του J , τότε το x_0 είναι το αριστερό άκρο του I (γιατί?). Για $\varepsilon > 0$ πάρε μόνο $b \in I$ με $x_0 < b < x_0 + \varepsilon$ και $\delta > 0$ με $y_0 + \delta \leq f(b)$.



6.5.8 Κάποιες εφαρμογές του Θ.Ε.Τ.

A) Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής όπου I διάστημα, ώστε

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in I$$

Τότε

είτε η f παντού θετική (δηλ. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$)

είτε η f παντού αρνητική (δηλ. $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$)

Απόδειξη.

Έστω ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει.

Άρα η f δεν είναι παντού θετική και η f δεν είναι παντού αρνητική.

Συνεπώς υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ ώστε

$$f(x_1) \leq 0 \text{ και } f(x_2) \geq 0$$

και εφόσον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ έχουμε ότι

$$f(x_1) < 0 \text{ και } f(x_2) > 0$$

Οπότε από το Θ.Ε.Τ. επειδή

$$f(x_1) < 0 < f(x_2)$$

και η f συνεχής, έπεται ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = 0$.

Άτοπο εφόσον $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

B) (β' τρόπος απόδειξης της ύπαρξης n -οστής ρίζας)

Εάν $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $b > 0$ ώστε $b^n = a$.

Απόδειξη.

Έστω η $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^n$, $x \geq 0$.

Η f είναι συνεχής. Επίσης

$$f(0) = 0 < a$$

και

$$f(1+a) = (1+a)^n \underbrace{\geq}_{\text{ανισότητα Bernoulli}} 1+na > a$$

Άρα εφόσον

$$f(0) < a < f(1+a)$$

και η f συνεχής, από το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι υπάρχει $b \in [0, 1+a]$ ώστε

$$f(b) = a \Rightarrow b^n = a$$

Επίσης $b \neq 0$ (αφού $f(0) = 0 \neq a$), άρα $b > 0$.

Θεώρημα 6.5.9. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $a < b$ μια συνεχής συνάρτηση.

Θέτουμε

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ φραγμένη στο } [a, x]\}$$

Παρατηρούμε ότι

- i) $A \neq \emptyset$ (αφού $a \in A$)
- ii) A φραγμένο (αφού $A \subseteq [a, b]$)
- iii) Υπάρχει $x \in A$ με $x > a$

[Πράγματι εφόσον η f συνεχής στο a έχουμε (Πρόταση ??) ότι είναι τοπικά φραγμένη στο a , δηλ. υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f φραγμένη στο

$$(a - \delta, a + \delta) \cap [a, b] = [a, a + \delta) \cap [a, b]$$

Έστω x με $a < x < \min\{a + \delta, b\}$.

Τότε $[a, x] \subseteq [a, a + \delta) \cap [a, b]$ και άρα η f φραγμένη στο $[a, x]$. Οπότε $x \in A$.]

Θέτουμε $\gamma = \sup A$.

Παρατηρούμε ότι από το (iii) έπεται ότι $\gamma > a$.

Θα δείξουμε ότι

$$1) \gamma = b \quad 2) b \in A$$

Για το (1) έχουμε

Προφανώς $\gamma \leq b$ αφού b άνω φράγμα του A .

Έστω ότι $\gamma < b$. Από την πρόταση ?? έχουμε ότι επειδή η f συνεχής στο γ έπεται ότι η f είναι τοπικά φραγμένη στο γ , δηλ. υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f φραγμένη στο

$$(\gamma - \delta, \gamma + \delta) \cap [a, b]$$

Θέτουμε

$$y = \max\{a, \gamma - \frac{\delta}{2}\}, \quad z = \min\{b, \gamma + \frac{\delta}{2}\}$$

και παρατηρούμε ότι

$$[y, z] \subseteq (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \cap [a, b]$$

και άρα η f φραγμένη στο $[y, z]$.

Επίσης έχουμε από την επιλογή των y, z ότι

$$y < \gamma < z$$

Άρα εφόσον η f φραγμένη στο $[a, y]$ (γιατί?) και στο $[y, z]$, έπεται ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, z]$.

Άρα $z \in A \Rightarrow z \leq \gamma$. Άτοπο αφού $\gamma < z$.

Για το (2) έχουμε

Εφόσον η f συνεχής στο b υπάρχει $\delta > 0$ με $b - \delta > a$ ώστε η f φραγμένη στο $[b - \delta, b]$ (γιατί?).

Επειδή $b - \delta < b \stackrel{(1)}{=} \gamma = \sup A$, υπάρχει $x \in A$ με $b - \delta < x$, οπότε η f φραγμένη στο $[a, x] \supseteq [a, b - \delta]$ και άρα $b - \delta \in A$, δηλ. η f φραγμένη στο $[a, b - \delta]$.

Οπότε επειδή η f φραγμένη στα $[b - \delta, b]$, $[a, b - \delta]$ έπεται ότι είναι φραγμένη στο $[a, b]$, δηλ. $b \in A$.

Άρα έχουμε ότι η f φραγμένη στο $[a, b]$.

β' τρόπος

Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$|f(x_n)| \geq n \quad (1)$$

Επειδή $(x_n) \subseteq [a, b]$ από το Θεώρημα B-W υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) ώστε $x_{k_n} \rightarrow x$.

Επίσης επειδή $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $a \leq x \leq b$.

Άρα εφόσον f συνεχής, $x_{k_n} \rightarrow x$, από την αρχή μεταφοράς έπεται ότι

$$f(x_{k_n}) \rightarrow f(x) \Rightarrow |f(x_{k_n})| \rightarrow |f(x)|$$

Άτοπο διότι από (1) έχουμε ότι

$$|f(x_n)| \rightarrow +\infty \Rightarrow |f(x_{k_n})| \rightarrow +\infty$$

Θεώρημα 6.5.10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε

$$f(x_1) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ή ισοδύναμα

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή και όμοια αποδεικνύεται ότι η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Θέτουμε

$$A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

το σύνολο τιμών της f .

Εφόσον η f είναι συνεχής από το ?? έχουμε ότι είναι φραγμένη και συνεπώς το A είναι φραγμένο.

Εάν δείξουμε ότι το $\sup A \in A$ τότε θα έχουμε ότι το A έχει μέγιστο στοιχείο, δηλ. το σύνολο τιμών της f έχει μέγιστο στοιχείο, που σημαίνει ότι υπάρχει $x_2 \in [a, b]$ ώστε $f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ή ισοδύναμα

$$f(x) \leq f(x_2) \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

Ας δείξουμε λοιπόν ότι $\sup A \in A$. Θέτουμε $\gamma = \sup A$.

Υποθέτουμε ότι $\gamma \notin A$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω η συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{1}{\gamma - f(x)}, \quad x \in [a, b]$$

Η g είναι καλά ορισμένη εφόσον δοθέντος ότι $\gamma \notin A$ έχουμε $\gamma \neq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα $\gamma - f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Η g επίσης είναι συνεχής (γιατί?).

Άρα εφόσον η g είναι συνεχής και ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ από το ?? έχουμε ότι η g είναι φραγμένη.

Άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|g(x)| \leq M \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \quad (1)$$

Παρατηρούμε όμως ότι για $\varepsilon = \frac{1}{M}$ εφόσον το $\gamma - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (αφού $\gamma = \sup A$) υπάρχει στοιχείο του A μεγαλύτερο από το $\gamma - \varepsilon$, δηλ. υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε

$$\begin{aligned} f(x_0) > \gamma - \varepsilon &\Rightarrow \gamma - f(x_0) < \varepsilon \Rightarrow \\ \gamma - f(x_0) < \frac{1}{M} &\xrightarrow[\substack{\text{αφού} \\ f(x_0) < \gamma \\ \text{(γιατί?)}}]{\text{αφού}} M < \frac{1}{\gamma - f(x_0)} \Rightarrow M < g(x_0) \end{aligned}$$

Άτοπο εφόσον από (1) έχουμε ότι

$$g(x_0) \leq M$$

Πρόταση 6.5.11. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Τότε

$$f([a, b]) = [m, M]$$

όπου

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Απόδειξη.

Καταρχήν εφόσον η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε

$$f(x_1) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ και } f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Θέτουμε $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Γι' αυτό αρκεί να δ.ο.

$$\text{i) } f([a, b]) \subseteq [m, M] \quad \text{και} \quad \text{ii) } [m, M] \subseteq f([a, b])$$

Για το (i) έχουμε

Έστω $y \in f([a, b])$. Τότε υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $y = f(x)$.

Εφόσον $f(x_1)$, $f(x_2)$ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f έχουμε ότι

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow m \leq y \leq M \Rightarrow y \in [m, M]$$

Για το (ii) έχουμε

$$\text{Έστω } y \in [m, M] \Rightarrow m \leq y \leq M \Rightarrow f(x_1) \leq y \leq f(x_2).$$

Εφόσον η f συνεχής και το y βρίσκεται μεταξύ δύο τιμών της f από το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε

$$y = f(x_0)$$

Άρα $y \in f([a, b])$.

6.5.12 Συμπέρασμα από τα ?? – ??

Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής όπου $I = [a, b]$ κλειστό διάστημα. Τότε

1) Η f είναι φραγμένη, δηλ. υπάρχει $L > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq L \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

2) Η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε

$$f(x_1) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

ή ισοδύναμα

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ για κάθε } x \in [a, b]$$

– Συνήθως συμβ. με $\max f$ (αντ. $\min f$) την μέγιστη (αντ. ελάχιστη) τιμή της f

3) Εάν $m = \min f$, $M = \max f$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f([a, b]) = [m, M]$$